Algorithmische Mathematik: Graphen & Anwendungen

Frühlingssemester 2018
P. Zaspel und I. Kalmykov
Universität Basel

Übungsblatt 7.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 17.4.2018, 14:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Kürzeste Wege mit negativen Gewichten)

Berechnen Sie im Graphen G aus Abbildung 1 durch Anwendung des Moore-Bellmann-Ford-Algorithmus ausgehend vom Knoten $s = 1$ die kürzesten Wege zu allen anderen Knoten.

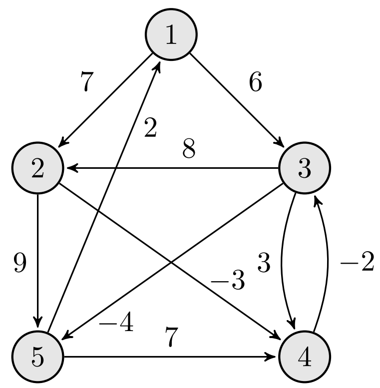

Abbildung 1: Graph G für Moore-Bellmann-Ford-Algorithmus.

Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus, in der zu jedem Knoten v die Distanz $l(v)$ vom Startknoten sowie sein Vorgänger $p(v)$ auf dem kürzesten s-v Weg verzeichnet sind.

l(1)	l(2)	l(3)	l(4)	l(5)	v	l(v)	p(v)

Hinweis. Die Tabelle aus der Aufgabenstellung wird analog zu dem Beispiel aus der Vorlesung ausgefüllt, mit dem Unterschied, dass nur dann eine neue Zeile zu der Tabelle hinzukommt, wenn die Weglänge $l(v)$ für einen Knoten $v \in V$ verändert wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn für einen Knoten $v \in V$ die if-Abfrage in der inneren Schleife vom Moore-Bellmann-Ford-Algorithmus wahr ist und die Weglänge $l(v)$ zum Starknoten aktualisiert wird. Der betrachtete Knoten v wird in die 6., die aktualisierten Werte für $l(v)$ und $p(v)$ in die 7. bzw. 8. Spalte eingetragen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Konservative Gewichte)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein gerichteter gewichteter Graph und $\pi\colon V \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die **reduzierten Kosten** einer Kante $(v, w) \in E$ bzgl. π durch $\gamma_\pi((v, w)) := \gamma((v, w)) + \pi(v) - \pi(w)$. Falls $\gamma_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in E$ gilt, heißt π ein **zulässiges Potenzial**. Zeigen Sie, dass es genau dann ein zulässiges Potenzial für G gibt, wenn die Gewichtsfunktion γ konservativ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Floyd-Warshall)

Berechnen Sie durch Anwendung des Floyd-Warshall-Algorithmus die Längen $[l_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$ der kürzesten Wege für alle Knotenpaare im Graphen G aus Abbildung 2. Gehen Sie dabei analog zur Vorlesung vor und geben Sie die Matrizen $L^{(k)} = [l_{i,j}^{(k)}]_{i,j=1}^{n}$ für jede Iteration der äußersten Schleife im Floyd-Warshall-Algorithmus an.

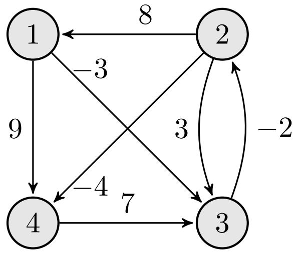

Abbildung 2: Graph G für den Floyd-Warshall-Algorithmus

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Moore-Bellman-Ford)

Implementieren Sie den Algorithmus von Moore-Bellman-Ford zur Berechnung der kürzesten Wege ausgehend vom Startknoten s in einem gewichteten Digraphen. Testen Sie Ihre Implementierung an dem Graphen aus Abbildung 1 für Startknoten $s = 1$.

Algorithmus (Moore-Bellman-Ford)

Input: gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E, \gamma)$, γ konservativ,
Startknoten $s \in V$

Output: $l\colon V \to \mathbb{R}$, $p\colon V \to V$.
Kürzeste Wege von s zu allen $v \in V$ und deren Weglänge mit
$l(v)$ – Länge eines kürzesten s-v-Wegs,
der aus einem kürzesten s-$p(v)$-Weg und der Kante $(p(v), v)$ besteht.
Falls $v \notin \text{post}^\star(s)$ ist $l(v) = \infty$ und $p(v)$ ist undefiniert.

$l(s) \leftarrow 0$
for $v \in V \setminus \{s\}$ **do**
  $l(v) \leftarrow \infty$
end for
for $k = 1, \dots, |V| - 1$ **do**
  for $(u, v) \in E$ **do**
    if $l(v) > l(u) + \gamma((u, v))$ **then**
      $l(v) \leftarrow l(u) + \gamma((u, v))$, $p(v) \leftarrow u$
    end if
  end for
end for
return l, p

(4 Punkte)