Algorithmische Mathematik:
Graphen & Anwendungen

Frühlingssemester 2018
P. Zaspel und I. Kalmykov

Universität Basel

Übungsblatt 8.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 24.4.2018, 14:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Minimaler Schnitt)

Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk mit $G = (V, E)$. Ein **Schnitt** (S, T) von N ist eine (disjunkte) Zerlegung

$$V = S \cup T$$

der Knotenmenge V, so dass $s \in S$ und $t \in T$. Die **Kapazität** eines Schnittes (S, T) ist gegeben durch

$$c(S,T) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in T} c(e).$$

Ein Schnitt (S, T) ist **minimal**, wenn gilt

$$c(S,T) \leq c(S', T') \quad \forall \, \text{Schnitte } (S', T') \text{ von } N.$$

Bestimmen Sie zu dem Netzwerk $N = (G, c, s, t)$ aus Abbildung 1 durch Vergleichen aller möglichen Schnitte (S, T) den Schnitt mit der minimalen Kapazität.

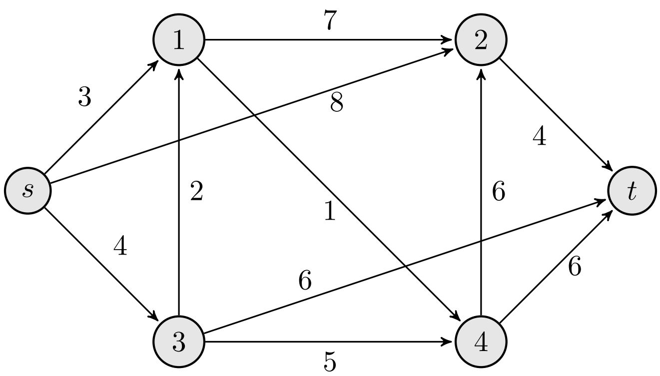

Abbildung 1: Netzwerk für Aufgabe 1

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (PageRank-Vektor)

Analog zu der Vorlesung betrachte wir den Webgraphen $W = (V, E)$ aus Abbildung 2 (d.h. ohne die Gewichte) mit V - Menge von Webseiten, E - Links zwischen verschiedenen Webseiten in V. Stellen Sie die zu W zugehörige Google-Matrix G auf und bestimmen Sie den PageRank-Vektor π_G.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Floyd-Warshall)

Implementieren Sie den Algorithmus von Floyd-Warshall zur Berechnung der kürzesten Wege für alle Knotenpaare $s, t \in V$ in einem gewichteten gerichteten Graphen $G = (V, E, \gamma)$ mit konservativen Gewichten γ. Testen Sie Ihre Implementierung an dem Graphen aus Abbildung 2.

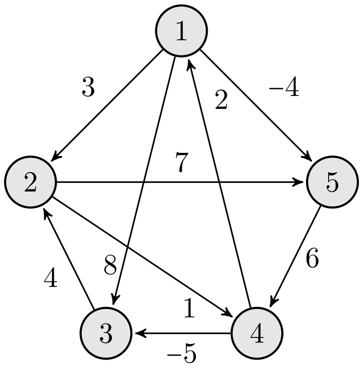

Abbildung 2: Graph für die Aufgaben 2 und 3

Algorithmus (Floyd-Warshall)

Input: gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E, \gamma)$, $V = \{1, \dots, n\}$, γ konservativ.

Output: $l\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $p\colon V \times V \to V$ in Matrixform $[l_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, $[p_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, mit $l(i,j) = l_{ij}$ und $p(i,j) = p_{ij}$, l_{ij} - kürzeste Weglänge von i nach j, (p_{ij}, j) - letzte Kante auf dem kürzesten Weg von i nach j. Falls $j \notin \operatorname{post}^\star(i)$, ist $l_{ij} = \infty$.

$\forall (i,j) \in E : l_{ij} \leftarrow \gamma((i,j))$
$\forall (i,j) \in (V \times V) \setminus E, i \neq j : l_{ij} \leftarrow \infty$
$\forall i \in V : l_{ii} \leftarrow 0$
$\forall i, j \in V : p_{ij} \leftarrow i$
for $k = 1, \dots, n$ **do**
    for $i = 1, \dots, n$ mit $i \neq k$ **do**
        for $j = 1, \dots, n$ mit $j \neq k$ **do**
            if $l_{ij} > l_{ik} + l_{kj}$ **then**
                $l_{ij} \leftarrow l_{ik} + l_{kj}$
                $p_{ij} \leftarrow p_{kj}$
            end if
        end for
    end for
end for
return $[l_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, $[p_{ij}]_{i,j=1}^{n}$

(4 Punkte)