Algorithmische Mathematik:
Graphen & Anwendungen

Frühlingssemester 2018
P. Zaspel und I. Kalmykov

Universität Basel

Übungsblatt 9.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 2.5.2018, 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Vitale Kante)

Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk mit $G = (V, E)$. Wir nehmen an, dass in N Flüsse mit Wert > 0 existieren.

a) Zeigen Sie, dass mindestens eine Kante $e \in E$ in N existiert, sodass das Entfernen von e den Wert des maximalen Flusses in N verringert.

b) Eine Kante $e_v \in E$ wird als **vital** ("most vital") bezeichnet, wenn durch ihre Entfernung der maximale Flusswert um den maximal möglichen Betrag verkleinert wird. Sei (S, T) ein minimaler Schnitt in N. Ist eine Kante maximaler Kapazität in (S, T) notwendigerweise vital? (Dabei sagen wir, dass eine Kante e zum Schnitt (S, T) gehört, falls $e^+ \in S$ und $e^- \in T$ gilt.) Mit anderen Worten, beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$e = \arg\max_{e^+ \in S, e^- \in T} c(e) \implies e \text{ vital.}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Minimaler Schnitt)

Sei f Fluss auf einem Netzwerk $N = (G, c, s, t)$ mit $G = (V, E)$. Wir bezeichnen mit $S_f \in V$ die Menge der Knoten, welche von s aus auf einem f-augmentierenden Pfad π_f erreichbar sind. Sei $T_f = V \setminus S_f$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann ein maximaler Fluss, wenn $t \in T_f$,

b) falls f ein maximaler Fluss ist, dann ist (S_f, T_f) ein minimaler Schnitt mit $w(f) = c(S_f, T_f)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Flussdekompositionssatz)

Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk mit $G = (V, E)$ und f ein Fluss in N. Wir möchten folgende Aussage zeigen: es existieren eine Teilmenge $\mathcal{P}$ aller s-t-Wege in G, eine Teilmenge $\mathcal{C}$ aller Kreise in G und eine Gewichtsfunktion

$$\omega : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+,$$

so dass

$$f(e) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C},\\ e \in E(P)}} \omega(P) \quad \forall e \in E, \tag{$\star$}$$

und

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} \omega(P) = \mathrm{val}(f). \tag{$\star\star$}$$

Gehen Sie wie folgt vor, um die Aussage zu zeigen:

a) Wählen Sie eine Kante $e \in E$ mit nichtverschwindendem Fluss und betrachten Sie die vorangehenden, bzw. nachfolgenden Kanten von e mit nichtverschwindendem Fluss. Konstruieren Sie auf diese Weise einen Kreis oder einen s-t-Weg P in G.

b) Setzen Sie $\omega(P) = \min_{e\in E(P)} f(e)$. Betrachten Sie nun den Fluss

$$f'(e) := \begin{cases} f(e) - \omega(P), & e \in E(P) \\ f(e), & e \notin E(P) \end{cases}$$

und nutzen Sie Induktion über die Anzahl der Kanten mit nichtverschwindendem Fluss um den Beweis abzuschliessen.

Bemerkung. Um die Aussagen ($\star$) und ($\star\star$) zu interpretieren betrachten wir "Elementarflüsse" auf N, d.h. Flüsse, welche nur auf einem s-t-Weg oder auf einem Kreis in G einen Konstanten Wert echt grösser 0 haben und sonst verschwinden. Nach der Aussage ($\star$) können wir uns die Stärke des Flusses f auf einer Kante $e \in E$ als Superposition von "Elementarflüssen" auf s-t-Wegen aus $\mathcal{P}$ und Kreisen aus $\mathcal{C}$ vorstellen. Der Wert der "Elementarflüsse" ist dabei durch die Funktion ω gegeben. Die Aussage ($\star\star$) können wir so interpretieren, dass der Wert des Flüsses $\mathrm{val}(f)$ sich aus der Superposition der "Elementarflüsse" auf den s-t-Wegen in $\mathcal{P}$ ergibt.

(4 Punkte)