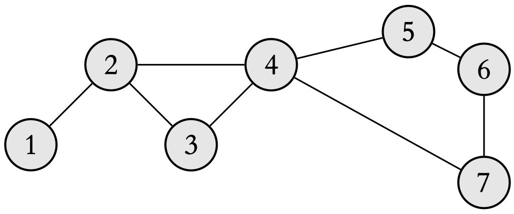
Übungsblatt 1.

Bearbeiten bis: **Montag, 03.03.2025, 14:15**

Aufgabe 1 (Graphen). Wir betrachten den folgenden Graphen:

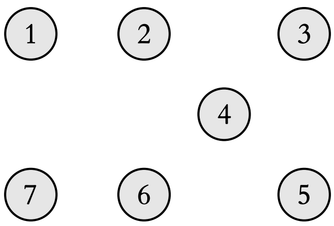


(a) Bestimmen Sie $G = (V, E)$.

(b) Geben Sie alle einfachen Wege von Knoten 1 zu Knoten 7 an.

(c) Bestimmen Sie den induzierten Teilgraphen von $V' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ sowohl formal wie auch graphisch.

Aufgabe 2 (Digraphen | 4 Punkte). Gegeben seien die folgenden Knoten $V = \{1, \dots, 7\}$:



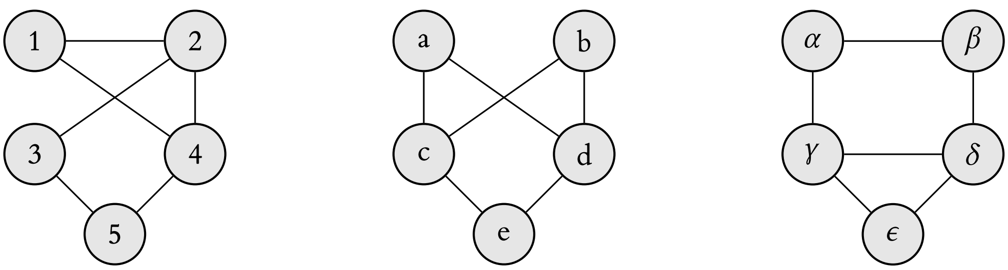
(a) Tragen Sie die Kanten $E = \big\{(1,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,5), (5,3), (4,6), (7,6), (7,1)\big\}$ ein.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{pre}(4)$, $\mathrm{pre}^\star(4)$, $\mathrm{post}(4)$ und $\mathrm{post}^\star(4)$.

(c) Bestimmen Sie den Eingangsgrad und Ausgangsgrad von allen Knoten.

(d) Ist der Knoten 3 vom Knoten 7 erreichbar? Falls ja, geben Sie den Weg an.

Aufgabe 3 (Graphenisomorphismus). Gegeben seien die folgenden drei Graphen. Welche sind isomorph, welche sind nicht isomorph? Beweisen Sie Ihre Aussagen.



G_1 G_2 G_3

Aufgabe 4 (Landau-Symbole | 4 Punkte). Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen auf den natürlichen Zahlen. Man sagt f sei für $x \to \infty$ asymptotisch durch g beschränkt, $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \to \infty$, falls

$$\limsup_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

gilt. Hierbei ist der Limes superior definiert als:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right).$$

Ausserdem sagt man, f verhält sich für $x \to \infty$ asymptotisch wie g, $f = \Theta(g)$ für $x \to \infty$, falls

$$f = \mathcal{O}(g) \qquad \& \qquad g = \mathcal{O}(f)$$

gelten. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $7x^3 + 5x^2 + 3 = \Theta(x^3)$ für $x \to \infty$.

(b) $4n\log(n) + 700n = \Theta\big(n\ln(n)\big)$ für $n \to \infty$.

(c) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \mathcal{O}(q^n)$ für $n \to \infty$ und jedes $q > 1$.

(d) $\ln(x) = \mathcal{O}(x)$, aber $\ln(x) \neq \Theta(x)$ für $x \to \infty$.