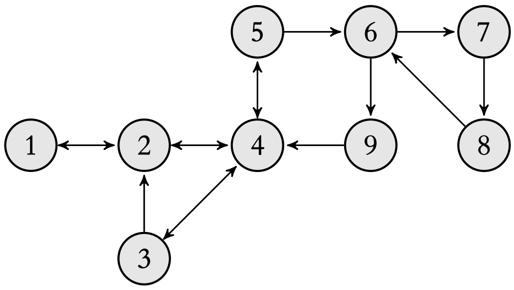
Übungsblatt 2.

Bearbeiten bis: **Montag, 17.03.2025**

Aufgabe 1 (Adjazenzmatrizen und Adjazenzlisten). Wir betrachten den folgenden Digraphen, in dem $\leftrightarrow$ für eine Doppelkante steht (d.h. Kurzform für je eine Kante *vom* Knoten und eine Kante *zum* Knoten).



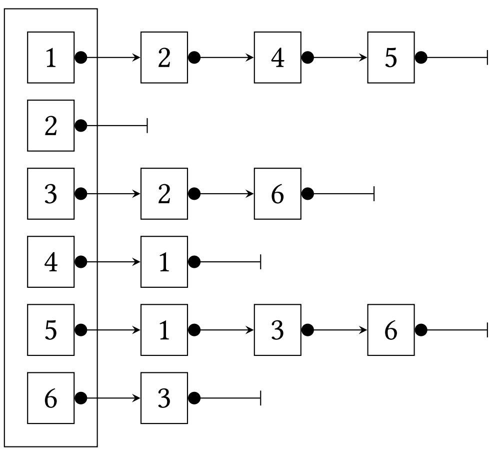
(a) Geben Sie die Adjazenzmatrix für obigen Digraphen an. Geben Sie auch die Adjazenzmatrix für den induzierten Graphen an.

(b) Geben Sie die Adjazenzliste für obigen Digraphen an.

(c) Zeichnen Sie einen Digraphen mit Knoten $1, 2, \ldots, 9$, der die untenstehende Adjazenzmatrix besitzt. Muss er als Digraph gezeichnet werden oder kann es auch ein Graph sein?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Zeichnen Sie einen Digraphen mit Knoten $1, 2, \ldots, 6$, der die untenstehende Adjazenzliste besitzt.



Aufgabe 2 (Zusammenhang I). Sei $\kappa(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen oder Digraphen $G = (V, E)$. Sei ferner $G' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus \{e\}$, wobei $e \in E$, derselbe Graph oder Digraph ohne die Kante e. Zeigen Sie:

(a) Für einen Graphen oder Digraphen G gilt $\kappa(G) \leq \kappa(G') \leq \kappa(G) + 1$.

(b) Für einen Digraphen G gilt $\kappa(G) = \kappa(G')$ genau dann, wenn man durch null -bis mehrfachem Ersetzen von Kanten $(v, w) \in E \setminus \{e\}$ mit $(w, v) \notin E$ mit der entgegengerichteten Kanten (w, v) in G erzwingen kann, dass e in einem Rundweg liegt.

Aufgabe 3 (Zusammenhang II | 4 Punkte).

(a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Man zeige, dass mindestens einer der Graphen G und $\bar{G}$ zusammenhängend ist, wobei $\bar{G} := (V, \bar{E})$ mit

$$\bar{E} := \{X \subseteq V : |X| = 2\} \setminus E$$

das Komplement von G ist.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die Relation

$$v \equiv w \quad :\Longleftrightarrow \quad v \cup \mathrm{post}^\star(v) = w \cup \mathrm{post}^\star(w), \quad v, w \in V$$

tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 4 (Knotengrad | 4 Punkte). Zeigen Sie, dass jeder Graph mit mehr als einem Knoten zwei Knoten vom selben Grad besitzt.