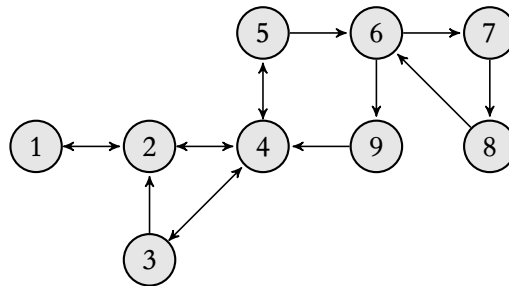




Übungsblatt 2.

Bearbeiten bis: Montag, 17.03.2025

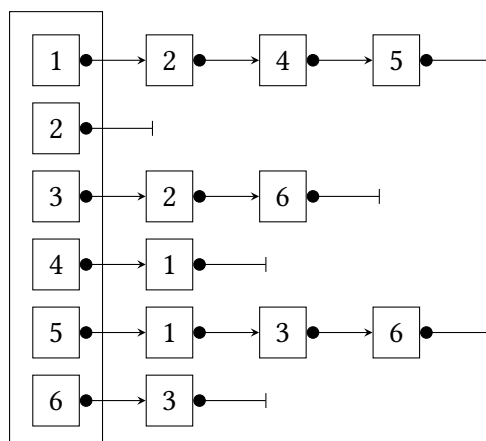
Aufgabe 1 (Adjazenzmatrizen und Adjazenzlisten). Wir betrachten den folgenden Digraphen, in dem \leftrightarrow für eine Doppelkante steht (d.h. Kurzform für je eine Kante *vom* Knoten und eine Kante *zum* Knoten).



- Geben Sie die Adjazenzmatrix für obigen Digraphen an. Geben Sie auch die Adjazenzmatrix für den induzierten Graphen an.
- Geben Sie die Adjazenzliste für obigen Digraphen an.
- Zeichnen Sie einen Digraphen mit Knoten $1, 2, \dots, 9$, der die untenstehende Adjazenzmatrix besitzt. Muss er als Digraph gezeichnet werden oder kann es auch ein Graph sein?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Zeichnen Sie einen Digraphen mit Knoten $1, 2, \dots, 6$, der die untenstehende Adjazenzliste besitzt.



Aufgabe 2 (Zusammenhang I). Sei $\kappa(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen oder Digraphen $G = (V, E)$. Sei ferner $G' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus \{e\}$, wobei $e \in E$, derselbe Graph oder Digraph ohne die Kante e . Zeigen Sie:

- (a) Für einen Graphen oder Digraphen G gilt $\kappa(G) \leq \kappa(G') \leq \kappa(G) + 1$.
- (b) Für einen Digraphen G gilt $\kappa(G) = \kappa(G')$ genau dann, wenn e in einem Rundweg liegt.

Aufgabe 3 (Zusammenhang II | 4 Punkte).

- (a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Man zeige, dass mindestens einer der Graphen G und \bar{G} zusammenhängend ist, wobei $\bar{G} := (V, \bar{E})$ mit

$$\bar{E} := \{X \subseteq V : |X| = 2\} \setminus E$$

das Komplement von G ist.

- (b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die Relation

$$v \equiv w \quad :\iff \quad v \cup \text{post}^*(v) = w \cup \text{post}^*(w), \quad v, w \in V$$

tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 4 (Knotengrad | 4 Punkte). Zeigen Sie, dass jeder Graph mit mehr als einem Knoten zwei Knoten vom selben Grad besitzt.