Serie 9.

Woche: **16.11 – 19.11.2026**

Aufgabe 1 (Positive Einträge | 1 Punkt).

Erzeuge einen zufälligen Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{10}$ mit Einträgen zwischen -5 und 5.

Schreibe anschliessend eine Funktion `s = sumPositive(x)`, welche die Summe aller positiven Einträge von x berechnet. Verwende dazu eine `for`-Schleife und eine `if`-Abfrage und benutze nicht den MATLAB-Befehl `sum`.

Hinweis: Ein zufälliger Vektor mit ganzzahligen Einträgen zwischen -5 und 5 kann zum Beispiel mit `x = randi([-5,5],10,1);` erzeugt werden.

Aufgabe 2 (Heron-Verfahren | 2 Punkte).

Das Heron-Verfahren oder babylonische Wurzelziehen ist ein Verfahren zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel x einer Zahl a. Man führt die folgende Iterationsvorschrift aus:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Man sieht unmittelbar, dass diese Folge sich nicht mehr verändert, wenn ein x_n die Quadratwurzel von a ist.

(a) Gesucht ist die Quadratwurzel von 2. Wähle einen geeigneten Startwert x_0 und führe die Iteration *solange* durch, *bis* der absolute Fehler $\left|x_{n+1}^2 - 2\right|$ kleiner ist als 10^{-8}. Schreibe dazu eine Matlab-Funktion `xn = Heron(x0)`.

(b) Verallgemeinere nun die Funktion `Heron` aus (i) so, dass sie auch für die Quadratwurzel einer beliebigen Zahl $a > 0$ verwendet werden kann.

Bemerkung: Das Verfahren ist ein Spezialfall des Newton-Verfahrens für die Nullstelle der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - a$. Dass die Folge für geeignete Startwerte x_0 gegen die Lösung konvergiert, wird in der Vorlesung *Einführung in die Numerik* bewiesen. Wir wenden das Verfahren hier einfach an.

Aufgabe 3 (Ableitungsapproximation | 3 Punkte).

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die erste und die zweite Ableitung einer Funktion numerisch zu approximieren. Für ein festes $h > 0$ können wir zur Approximation der ersten Ableitung den (rechtsseitigen) Differenzenquotienten erster Ordnung

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

verwenden. Zur Approximation der zweiten Ableitung können wir den Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

verwenden.

(a) Schreibe eine Funktion `[df,d2f] = Differenzenquotient(x, h, f)`, die für einen gegebenen Vektor `x`, eine Schrittweite `h` und ein function handle `f` die beiden Differenzenquotienten berechnet.

(b) Teste dein Programm mit Hilfe der Funktion $f(x) = \sin(x)$ für $x \in [0, 5]$ (Schrittweite $h = 0.1$). Zeichne dazu mit `subplot` vier Grafiken in ein Fenster (Beispiel siehe unten):
Erste Zeile: Die exakte und approximierte Ableitung für f' bzw. f''.
Zweite Zeile: Der Absolutbetrag des Fehlers an jedem Punkt x_i von der Approximation durch den Differenzenquotienten.
Speichere die Grafik als `.png`-Datei.

(c) Wie gross ist der maximale Fehler, den wir bei beiden Differenzenquotienten machen? Wie gross ist er für $h = 0.01$ und $h = 0.001$?