Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 19. Februar 2018

Aufgabenblatt 1

Hinweis: Diese Aufgaben werden in den Übungsstunden in der zweiten Semesterwoche besprochen und dienen der Wiederholung des Stoffes des letzten Semesters. Die Abgabe der Aufgaben ist fakultativ. Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Lineare Abhängigkeit)* Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Teilmengen in den angegebenen Vektorräumen linear abhängig sind oder nicht.

(a) $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$, wobei $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\{1+i, 1-i\} \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ einmal als komplexer Vektorraum und einmal als reeller Vektorraum aufgefasst werde.

(c) $\{x+1, (x+1)^2, (x-1)^2, x^2\}$ im Raum der reellen Polynome. (6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Spatvolumen, Determinante)* Seien $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Unbekannte x so, dass das Volumen des von u, v, w aufgespannten Spates gleich 5 ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es? (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Matrixmultiplikation)* Sei $\zeta_k := e^{k2\pi i/3}$ und $A_k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \zeta_k^2 & \zeta_k \\ \zeta_k & 1 & \zeta_k^2 \\ \zeta_k^2 & \zeta_k & 1 \end{pmatrix}$ (für $k = 1, 2, 3$). Rechnen Sie nach: $A_j A_k = 0$ für alle $j \neq k$ und $A_k^2 = A_k$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Lineare Unterräume)* Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume der angegebenen Vektorräume und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a + d = 0 \right\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. (b) $U = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$.

(c) Die Teilmenge $U \subset \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ derjenigen Funktionen, die monoton steigend sind.

(d) $U = \{f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und } f(0) = 0\} \subset \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Basis)* Überprüfen Sie, dass $V = \{p(x)\, e^x \mid p \text{ Polynom von Grad} \leq 2\}$ ein linearer Unterraum des Raums aller Funktionen ist. Sei $f(x) = x^2 e^x$. Zeigen Sie, dass die Funktionen f, f' und f'' eine Basis von V bilden. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 2. März 2018, in der Vorlesung oder bis Montag, 5. März, 10 Uhr im Fachbereich Mathematik.