Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1. *(Schwingender Ring)* Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion. Das Verhalten eines schwingenden Ringes werde beschrieben durch die eindimensionale Wellengleichung $c^2\partial_x^2 u(x,t) = \partial_t^2 u(x,t)$ mit den Randbedingungen $u(x,t) = u(x+2\pi,t)$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $\partial_t u(x,0) = f'(x)$ (für alle $x, t \in \mathbb{R}$). Konstruieren Sie eine Lösung für dies Problem, indem Sie zunächst Produktlösungen (in kartesischen Koordinaten) bestimmen und dann einen Reihenansatz aufstellen. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Produktlösungsansatz)* Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x,t) = c^2\partial_x^2 u(x,t) \quad (0 \le x \le L, t > 0) \quad \text{mit den Randbedingungen}$$

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Konstruieren Sie eine Lösung $u \in C^0([0,L] \times \mathbb{R}_{\ge 0}) \cap C^2([0,L] \times \mathbb{R}_{>0})$ zur Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x) = L - |2x - L|$ für $0 \le x \le L$. Bestimmen Sie dazu zunächst die Produktlösungen und machen Sie dann einen Superpositionsansatz. (6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Inhomogene Wellengleichung)* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$c^2\,\partial_x^2 u(x,t) - \partial_t^2 u(x,t) = f(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)\,,$$

wobei $f(x,t)$ eine gegebene stetige Funktion ist.

Hinweis: Gehen Sie über zu den Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ (siehe Skript S. 78) und schreiben Sie die Differentialgleichung entsprechend um. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Gedämpfte Wellengleichung)* Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. (a) Führen Sie jede Lösung u der Telegraphengleichung $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u + 2k\,\partial_t u$ mit dem Ansatz $v(x,t) = u(x,t) \cdot g(t)$ auf eine Lösung der gedämpften Wellengleichung $\partial_x^2 v = \partial_t^2 v - k^2 v$ zurück.

(b) Zeigen Sie: Ist $v(x,t)$ eine Lösung der gedämpften Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen $v(x,0) = f(x)$ und $\partial_t v(x,0) = 0\ \forall x$, dann ist die Funktion $w(x,y,t) = v(x,t) \cdot e^{ky}$ eine Lösung der Wellengleichung $\partial_x^2 w + \partial_y^2 w = \partial_t^2 w$ mit $w(x,y,0) = f(x) \cdot e^{ky}$ und $\partial_t w(x,y,0) = 0\,.$ (5 Punkte)

Abgabe: Ausnahmsweise bis Mittwoch, den 9. Mai 2018, bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.