Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 26. April 2019

Aufgabenblatt 10

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Niveaulinien)* Bestimmen und skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen in zwei Variablen jeweils die Niveaumengen $N_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$, und zwar für $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ und $c = 2$.

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 10xy$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Funktionsgraphen)* Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen aus?

(a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 \quad (x, y \in \mathbb{R})$. (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) \quad ((x,y) \neq (0,0))$.

(c) $f(x,y) = -x\sin(y^2) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \pi)$. (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Lokale Extrema)* Berechnen Sie für die folgenden Funktionen in zwei Variablen jeweils die kritischen Punkte und entscheiden Sie anhand der Hessematrix, ob es sich um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x,y) = 3x^2 + (y^2 - 4)^2$. (b) $f(x,y) = \cos(\pi xy) + (y-1)^2$ für $0 < x, y \leq 2$.

(c) $f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$. (6 Punkte)

Aufgabe 4. *(Unstetigkeitsstellen)* Die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{10}{|x|+|y|} & \text{falls } 1 \leq |x| + |y| < 10 \\ 5 & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1/4 \\ 0 & \text{falls } |x| + |y| \geq 10 \\ 10 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen ist f unstetig?

(b) Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$, $c = 5$, $c = 10$. Welche dieser Niveaumengen sind abgeschlossen? Welche sind kompakt? Welche sind zusammenhängend? (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Symmetrische 2×2–Matrizen)* Sei A eine reelle symmetrische 2×2-Matrix. Zeigen Sie: (a) A ist indefinit $\Leftrightarrow \det A < 0$.

(b) A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det A > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 0$ und $a_{11} > 0$.

(3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 3. Mai 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.