Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 3. Mai 2018

Aufgabenblatt 10

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Kettenregel)* Sei $f(x,y,z) = ye^x - \ln(z^2)$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, und $\gamma(t) = (\ln(t^2+1), \arctan(t^2), e^t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ \gamma$ auf zwei Arten, einerseits mit der Kettenregel und andererseits, indem Sie $f \circ \gamma$ explizit als Funktion von t schreiben und direkt nach t ableiten. (3 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lokale Extrema)* Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die kritischen Punkte und entscheiden Sie anhand der Hessematrix, ob es sich um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x,y) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x,y) = \cos(\pi \cdot xy) + (x+1)^2$ für $-2 < x, y < 2$.

(c) $f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2-1)^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$. (6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Optimale Verpackung)* Ein Obsthändler bestellt Kisten zu je 16/3 Liter für die Verpackung von Erdbeeren. Nehmen wir an, die Herstellungskosten einer Kiste der Breite x, der Länge y und der Höhe z betragen

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + (3/2)(x^2 + y^2 + 2z^2)\,.$$

Wie muss der Hersteller die Werte x, y, z wählen, damit die Herstellungskosten möglichst gering sind?

Hinweis: Eliminieren Sie zunächst z mithilfe der Volumenangabe. (5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Taylorentwicklung)* Die Taylorentwicklung zweiten Grades einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $p \in D$ ist definiert als:

$$f(p+tv) = f(p) + t\langle \nabla(f)(p), v\rangle + \frac{t^2}{2}\, v^T H_f(p) v + t^2 R(v)\,,$$

wobei $v = (x,y)$ ein Richtungsvektor der Länge 1, t ein genügend kleiner reeller Parameter und $R(v)$ der Restterm ist. Berechnen Sie die Taylorentwicklung um den Nullpunkt der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = 4 + (x^2+1)y - (x+y)^2$; (b) $f(x,y) = x\,e^{-(x^2+y^2)}$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Zweite Ableitungen)* Rechnen Sie nach, dass die Funktion, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}\,,$$

im Nullpunkt zweimal partiell differenzierbar ist, aber $\partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$ ist. Welche der zweiten Ableitungen ist im Nullpunkt nicht stetig? (3 Punkte)

Abgabe: Ausnahmsweise Mittwoch, den 9. Mai 2018, bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.