Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 10. Mai 2018

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. *(Fouriertransformation)* Die Laplacegleichung für die obere Halbebene lautet $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}, y > 0)$. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vorgegeben. Bestimmen Sie mithilfe der Fouriertransformation bezüglich der Variablen x eine Lösung u dieser Gleichung, die ausserdem folgende Randbedingungen erfüllt:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{|(x,y)| \to \infty} u(x,y) = 0 \,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Potenzreihenansatz)* Sei $\nu \geq 0$ vorgegeben. Bestimmen Sie eine analytische Lösung J_ν der Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + (1 - \frac{\nu^2}{x^2}) f(x) = 0 \quad (x > 0)\,,$$

die in der Nähe von $x = 0$ beschränkt bleibt, indem Sie den Potenzreihenansatz $f(x) = x^\nu (1 + \sum_{k=1}^\infty a_k x^k)$ verwenden, und für die Koeffizienten a_k rekursive Bedingungen herleiten. Finden Sie dann eine explizite Beschreibung der a_k und überprüfen Sie, dass der Konvergenzradius Ihrer Reihe ∞ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Nullstellen von Fundamentallösungen)* Seien $a < b$ gegeben und $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ eine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei f nicht überall verschwinden soll. Begründen Sie, dass dann alle Nullstellen von f einfach sind (d.h. ist $f(x_0) = 0$, so ist $f'(x_0) \neq 0$) und sich nirgends häufen. (3 Punkte)

Aufgabe 4. *(Nullstellenvergleichssatz)* Für $u, v \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ gelte

$$u''(x) = q(x)\, u(x) \quad \text{und} \quad v''(x) = q_0(x)\, v(x) \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dabei seien q, q_0 stetige Funktionen auf $[a,b]$ mit $q(x) < q_0(x)$ für alle x. Seien weiter $\alpha < \beta$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von v, also $v(x) \neq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. Beweisen Sie: u hat eine Nullstelle zwischen α und β.

Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen von $W = uv' - u'v$ auf $[\alpha, \beta]$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Besselfunktionen)* Bezeichne J_ν die ν-te Besselfunktion (siehe Aufgabe 2).

(a) Rechnen Sie nach, dass die Funktion $u(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x)$ (für $x > 0$) folgende Differentialgleichung löst:

$$u''(x) = \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - 1 \right) u(x)\,.$$

(b) Zeigen Sie mithilfe der in Aufgabe 3 und 4 formulierten Aussagen, dass die Besselfunktionen die in Bemerkung 4.4.1 aufgezählten Eigenschaften haben. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 17. Mai 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.