Aufgabenblatt 11

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Kritische Punkte)* Berechnen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x,y) = (x+y)^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3xy$.

(b) $f(x,y) = 4 + \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$.

(c) $f(x,y) = 3(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)^3$. (6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Tangentialebene)* Der Punkt $p = (1,2,1)$ liegt auf dem Ellipsoid, definiert durch die Gleichung $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Finden Sie eine Ebenengleichung für die Tangentialebene, die das Ellipsoid im Punkt p berührt. Wo schneidet diese Tangentialebene die x-y-Ebene? (Hinweis: Schreiben Sie die obere Hälfte des Ellipsoids als Graph einer passenden Funktion in x und y.) (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Weglänge)* Berechnen Sie die Längen der folgenden Wege:

(a) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ für $0 \le t \le a$ ($a > 0$ vorgegeben).

(b) $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ für $0 \le t \le 1$.

(c) $\gamma(t) = \left(r\cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+1}}\right), r\sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+1}}\right), \frac{t}{\sqrt{r^2+1}}\right)$ für $0 \le t \le 4\pi$ ($r > 0$ gegeben).

(5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Steilster Anstieg)* Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar, $p \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Für einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $||v|| = 1$ sei $g_v(t) = f(p+tv)$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt $g_v'(0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f oberhalb des Punktes p in Richtung v an. Zeigen Sie, dass $g_v'(0) \le ||\nabla f(p)||$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $v = \nabla f(p)$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Taylorentwicklung)* Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis zum zweiten Grad der folgenden Funktionen in zwei Variablen

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{1}{2} < |x+y| < 2$ um den Punkt $p = (1,1)$.

(b) $f(x,y) = (x+1)e^{2y}$ (für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) um den Punkt $p = (0,0)$. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 10. Mai 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.