

Aufgabenblatt 12

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*Wegintegral*) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ für $0 \leq t \leq n\pi$. Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes $F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ längs γ . (3 Punkte)

Aufgabe 2. (*Potentiale*) Zu den folgenden Vektorfeldern testen Sie jeweils die Vertauschungsrelationen 5.1.4 und bestimmen Sie ein Potential, falls es existiert:

$$(a) F(x, y) = \begin{pmatrix} y e^{yz} \\ x(1 + yz) e^{yz} \\ xy^2 e^{yz} \end{pmatrix}, \quad (b) F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{1+x^2y^2} \\ \frac{x}{1+x^2y^2} \end{pmatrix}, \quad (c) F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (*Doppelintegrale über Rechtecke*) (a) Berechnen Sie $\int_R \frac{x}{\sqrt{x^2+y}} d^2(x, y)$ über das Rechteck $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der nach unten durch das Rechteck $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 4\}$ in der x - y -Ebene und nach oben durch die Fläche, gegeben durch $z = x^2/y$, begrenzt wird. (6 Punkte)

Aufgabe 4. (*Gebietsintegrale*) Zeichnen Sie jeweils das angegebene Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$, schreiben Sie es als Normalgebiet und berechnen Sie dann das Gebietsintegral:

- (a) $\int_S (y - 2x^2) d^2(x, y)$, wobei der Rand von S durch $|x| + |y| = 1$ gegeben ist.
- (b) $\int_S 1 d^2(x, y)$, wobei S von den Kurven, gegeben durch $x = y^2 - 1$ und $(x+1)(3-y) = 4$, berandet wird. (4 Punkte)

Aufgabe 5. (*Umparametrisierung*) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\varphi: [r, s] \rightarrow [a, b]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x) > 0$ für alle x . Zeigen Sie, dass die Wegintegrale längs γ und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ für jedes stetige Vektorfeld F auf D übereinstimmen. Wie steht es mit dem Wegintegral längs $\gamma^-(t) = \gamma(b - t + a)$? (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 17. Mai 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.