Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 17. Mai 2018

Aufgabenblatt 12

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Integration mit Polarkoordinaten)* Berechnen Sie durch Transformation auf Polarkoordinaten die folgenden Gebietsintegrale:

(a) $\displaystyle\int_S \frac{1}{1+x^2+y^2}\, d^2(x,y)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ der Durchschnitt der Einheitskreisscheibe mit dem unteren, rechten Quadranten ist.

(b) $\int_S 1\, d^2(x,y)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet ist, das von der Kurve, gegeben durch

$$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)\,,$$

berandet wird. (Die Gestalt dieser Kurve ist eine liegende Acht.) (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Gebietsintegrale)* Skizzieren Sie die angegebenen Gebiete und berechnen Sie die Integrale nach passender Wahl der Integrationsreihenfolge:

(a) $\displaystyle\int_S \frac{\sin(y)}{y}\, d^2(x,y)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ durch $x=0$, $y=\pi$, $y=\pi\, x$ berandet wird.

(b) $\int_S (y-2x^2)\, d^2(x,y)$, wobei der Rand von $S \subset \mathbb{R}^2$ durch $|x|+|y|=1$ gegeben ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Lineare Koordinatentransformation)* Sei

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 2y \le 4x,\ x+y \le 9\}\,.$$

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_B (x+y)\, \exp(2x-y)\; d^2(x,y)$ mithilfe der Koordinatentransformation $u = x+y$, $v = 2x-y$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Satz von Green)* Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Green den Flächeninhalt des von der Kurve $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, umschlossenen Gebietes.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Cavalieri-Prinzip)* Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte messbare Teilmenge und $p = (x_0, y_0, h) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit $h > 0$. Unter dem *Kegel* mit Grundfläche B und Spitze p versteht man die Menge

$$C(B,p) := \{((1-t)x + tx_0, (1-t)y + ty_0, th) \mid (x,y) \in B, 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Beweisen Sie: $\mathrm{Vol}_3(C(B,p)) = \mathrm{Vol}_2(B) \cdot \frac{h}{3}$. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 24. Mai 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.