Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 16. Mai 2019

Aufgabenblatt 13

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Cavalieri-Prinzip)* Berechnen Sie mit dem Cavalieri-Prinzip das Volumen des Körpers, definiert durch $x^2 + y^2 \leq e^{-2z}$ und $0 \leq z \leq b$ ($b > 0$ gegeben). (3 Punkte)

Aufgabe 2. *(Integration mit Polarkoordinaten)* Berechnen Sie durch Transformation auf Polarkoordinaten die folgenden Gebietsintegrale:

(a) $\displaystyle\int_S \ln(1 + x^2 + y^2)\, d^2(x, y)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ der Durchschnitt der Einheitskreisscheibe mit dem oberen, rechten Quadranten ist.

(b) $\int_S 1\, d^2(x, y)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet ist, das von der Kurve, gegeben durch

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)\,,$$

berandet wird. (Die Gestalt dieser Kurve ist eine liegende Acht.) (6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Zylinderkoordinaten)* Berechnen Sie jeweils durch Transformation auf Zylinderkoordinaten das Dreifachintegral $\int_K (x^2 + y^2)\, d^3(x, y, z)$, wobei

(a) der Körper K oberhalb der x-y-Ebene liegt und von dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ berandet wird.

(b) der Körper K von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ berandet wird. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Lineare Koordinatentransformation)* Sei

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2y \leq 4x,\ x + y \leq 2\}\,.$$

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_B (x + y)^2 \cos\left((2x - y)(x + y)\,\pi\right)\ d^2(x, y)$ mithilfe der Koordinatentransformation $u = x + y$, $v = 2x - y$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Satz von Green)* Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Green den Flächeninhalt des von der Kurve $\gamma(t) = (\sin(t)\cos^3(t), -\sin^3(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, umschlossenen Gebietes. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 24. Mai 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.