

Aufgabenblatt 1

Diese Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde am 5. März besprochen, die Abgabe der Aufgaben bis spätestens 5.3., 10 Uhr, ist fakultativ, bringt Ihnen aber Bonuspunkte.

Aufgabe 1. (*Lösung durch Trennung der Variablen*) Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y' = e^y \sin(x)$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. (b) $y' = e^y \sin(x)$, $y(\pi) = 0$. (3 Punkte)

Aufgabe 2. (*Lösbarkeit eines Anfangswertproblems*) Das Anfangswertproblem

$$y'x = y^2, \quad y(x_0) = y_0 \quad (x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$

ist nicht immer lösbar. Finden Sie heraus, für welche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es lösbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls sämtliche Lösungen. (4 Punkte)

Aufgabe 3. (*Anzahl Lösungen eines Anfangswertproblems*) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \begin{cases} -x\sqrt{y} & \text{für } y \geq 0 \\ x\sqrt{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Möglichkeiten. Für welche Punkte (x_0, y_0) gibt es mehrere Lösungen zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$? (4 Punkte)

Aufgabe 4. (*Lösung durch Transformation auf bekannten Typ*) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme jeweils mithilfe einer geeigneten Substitution.

(a) $y' = (x - y + 3)^2$, $y(1) = 1$.

(b) $y' = \frac{y}{x} - \exp(\frac{y}{x})$, $y(e^e) = -e^e$. (6 Punkte)

Aufgabe 5. (*Kurvenscharen*) Finden Sie jeweils eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren maximale Lösungen genau die folgenden Funktionen sind (dabei ist jeweils $c \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter):

(a) $\varphi(x) = cx^2$.

(b) $\varphi(x) = cx^2 + c$.

(c) $\varphi(x) = \begin{cases} cx^2 + c^2 & \text{für } c \geq 0 \\ cx^2 - c^2 & \text{für } c < 0 \end{cases}$ (3 Punkte)