Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 — 13. Februar 2020

Aufgabenblatt 1

Hinweis: Diese Aufgaben nehmen Themen aus dem letzten Semester wieder auf, und Abgabe ist bereits in der ersten Semesterwoche! Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Spann, Linearkombination)* Seien $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Liegt w in der von u und v in $\mathbb{R}^3$ erzeugten Ebene? Falls ja, schreiben Sie w als Linearkombination der Vektoren u und v. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lineare Unterräume)* Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume der angegebenen Vektorräume und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Im $\mathbb{R}^2$ die Menge der Vektoren, die auf $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

(b) Im Raum aller Funktionen diejenigen, die stetig sind und bei $x = 1$ den Wert 0 annehmen.

(c) Im Raum der 2×2-Matrizen die Teilmenge $U = \{A \mid \mathrm{Rang}(A) < 2\}$.

(d) Im Raum $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ die Teilmenge $U = \{A \mid A = A^T\}$ (zur Transponierten A^T einer Matrix A siehe Aufgabe 4, Blatt 13, Mathematische Methoden I) (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Dimension)* Bezeichne U die Menge derjenigen reellen 3×3-Matrizen A mit $A = -A^T$. Zeigen Sie, dass U einen linearen Unterraum im Vektorraum aller 3×3-Matrizen bildet. Welche Dimension hat dieser Unterraum? Geben Sie eine Basis an. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Basis)* Sei $V = \{p(x) \cdot \exp(2x) \mid p \text{ Polynom von Grad } \leq 2\}$. Überprüfen Sie, dass V ein linearer Unterraum des Raums aller Funktionen ist. Sei $f(x) = x^2 \exp(2x)$ und $g(x) = \exp(2x)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen f, f', f'' eine Basis von V bilden und schreiben Sie g als Linearkombination dieser Basis. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Determinanten)* Berechnen Sie mithilfe von vollständiger Induktion die Determinante der Matrix $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & \dots & \dots & \dots & n \end{pmatrix}$ (für $n \in \mathbb{N}$). (4 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 21. Februar 2020, in der Vorlesung oder bis 13 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.