Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 28. Februar 2018

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. *(Bernoulli Differentialgleichung)* Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} + x\sqrt{y}\,, \quad y(1) = 1\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lösung durch Transformation auf bekannten Typ)* Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x + 3y + 1}{3x + y + 3}\,, \quad y(0) = 0\,,$$

mithilfe der neuen Variablen $u = \frac{y}{x+1}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Exakte Differentialgleichungen)* Seien g und h stetig differenzierbare Funktionen auf einem sternförmigen Gebiet D in $\mathbb{R}^2$ derart, dass $h(x,y) \neq 0$ für $(x,y) \in D$ und

$$\frac{g_y(x,y) - h_x(x,y)}{h(x,y)}$$

nur von x abhängt. Zeigen Sie, dass dann ein integrierender Faktor $M(x) \neq 0$ existiert, so dass die Differentialgleichung

$$M(x)\,g(x,y)\,dx + M(x)\,h(x,y)\,dy = 0$$

auf D exakt ist.

Hinweis: Sie können folgendes verwenden: Eine Differentialform $p\,dx + q\,dy$ auf einem sternförmigen Gebiet D ist exakt genau dann, wenn sie auf D geschlossen ist, das heisst, wenn $p_y(x,y) = q_x(x,y)$ ist für alle $(x,y) \in D$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Integrierender Faktor)* Wenden Sie die Überlegungen aus Aufgabe 3 an, um die Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu bestimmen:

$$(2xy - e^{-2x})\,dx + x\,dy = 0\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Potenzreihenansatz)* Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - x^2\,, \quad y(0) = 1\,,$$

mit dem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Setzen Sie dazu den Ansatz in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie die a_k durch Koeffizientenvergleich. Zeigen Sie dann, dass die so gefundene Potenzreihe für $|x| < 1$ konvergiert und also eine Lösung auf dem Intervall $(-1,1)$ darstellt, indem Sie die Koeffizienten geeignet abschätzen. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 8. März 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.