Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 — 21. Februar 2020

Aufgabenblatt 2

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Anfangswertaufgaben)* Bestimmen Sie die zu den Anfangsbedingungen passenden Lösungen $y = \varphi(x)$ der folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen und geben Sie dazu jeweils das maximale Definitionsintervall der Lösung an:

(a) $y' = (x+1)y^2\,, \quad y(1) = 1\,.$ (b) $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \quad (x, y > 0)\,, \quad y(0) = 1.$

(c) $y' = e^y \sin(2x), \quad y(0) = 0.$ (6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Kurvenscharen)* Finden Sie jeweils eine Differentialgleichung erster Ordnung, die die folgenden Kurvenscharen als Lösungen hat:

(a) $y(x) = cx^2\,,$ (b) $y(x) = cx^2 + c\,,$ (c) $y(x) = cx^2 + (c^3/|c|)$ $(c \neq 0)$ bzw. $y(x) = 0\ \forall x.$

(Hier ist jeweils c ein reeller Parameter und $x \in \mathbb{R}$ beliebig.) (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Lineare Differentialgleichung)* Bestimmen Sie durch Variation der Konstanten die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = 2x + 1 - y\,, \quad y(1) = 1.$ (b) $y' + 3y = \sin(2x)\,, \quad y(0) = 0.$ (5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Wachstumsmodelle)* (a) Das logistische Wachstum ist gegeben durch

$$p(t) = \frac{p_\infty}{1 + e^{-\lambda t}(p_\infty/p_0 - 1)} \quad (t \geq 0)\,,$$

wobei $p_0 < p_\infty$ und λ positive Konstanten sind. Zeigen Sie, dass die Funktion $p(t)$ genau dann einen Wendepunkt hat, wenn $p_0 < \frac{p_\infty}{2}$ ist.

(b) Angenommen, Sie beobachten ein konkretes Wachstum durch Zellteilung, messen zur Startzeit 100 Zellen und erreichen eine Sättigung bei etwa $4'000$ Zellen. Wenn logistisches Wachstum vorliegt (für $\lambda = \ln(2)$) und die Zeit t in Stunden gemessen wird, wie viele Zellen gibt es dann nach einer, nach zwei, nach 5 Stunden? Wie lange dauert es, bis 3900 Zellen entstanden sind? Welche Werte erhalten Sie, wenn Sie statt des logistischen Modells das Tumormodell von Gompertz verwenden:

$$p(t) = \exp\left(\ln(p_\infty) - \ln(\frac{p_\infty}{p_0})e^{-\lambda t}\right)\ ?$$

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Mehrdeutigkeit der Lösung)* Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $y = \varphi(x)$ der Differentialgleichung

$$y' = \begin{cases} -x\sqrt{y} & \text{für } y \geq 0 \\ x\sqrt{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

zur Anfangsbedingung $y(2) = 0$. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 28. Februar 2020, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.