Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 7. März 2018

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. *(Vergleich von Normen)* (a) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin(nx)$ (für $|x| \leq \pi$, $n \in \mathbb{N}$) gleichmässig konvergiert, aber im Sinne der Norm $||\cdot||_1$ auf $C^1([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ keine Cauchyfolge ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{für } |x| < \frac{1}{2n} \\ |x| - \frac{1}{4n} & \text{für } \frac{1}{2n} \leq |x| \leq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gleichmässig konvergieren. Schliessen Sie nun, dass $C^1([-1,1],\mathbb{R})$ mit der Maximumsnorm keinen Banachraum bildet. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Banachräume)* Seien $a < b$ fest gewählt. (a) Beweisen Sie durch Induktion, dass der Vektorraum $C^n([a,b],\mathbb{R})$ mit der Norm $||f||_n := \max\{||f||_0, ||f'||_0, \ldots, ||f^{(n)}||_0\}$ ein Banachraum ist.

(b) Finden Sie in $V = C^2([a,b],\mathbb{R})$ eine $||\cdot||_1$-Cauchyfolge, die in V keinen Grenzwert hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Konvergenzbegriffe)* Skizzieren Sie die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{3/2}x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Gegen welche Funktion konvergiert die Folge f_n punktweise? Liegt hier auch Konvergenz im quadratischen Mittel vor? Handelt es sich um eine Cauchyfolge im Sinne der L^1–Norm bzw. im Sinne der L^2-Norm? (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Weitere Norm)* Rechnen Sie nach, dass auf $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$ durch die Vorschrift $||f|| := \max\{|x^2 f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$ eine weitere Norm definiert wird. Zeigen Sie, dass V mit dieser Norm keinen Banachraum bildet. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Operatornorm)* Auf dem $V = C^0([0,a],\mathbb{R})$ ($a > 0$ fest) betrachten wir drei Normen, nämlich die Maximumsnorm $||f||_0$ und die Normen $||f||_1 := \max\{|f(x)|e^{-ax} \mid 0 \leq x \leq a\}$ und $||f||_2 := \max\{|f(x)|e^{-x^2} \mid 0 \leq x \leq a\}$. Zeigen Sie, dass der Operator $T\colon V \to V$, gegeben durch

$$T(f)(x) := \int_0^x t f(t)\, dt \quad (0 \leq x \leq a),$$

bezogen auf alle drei Normen Lipschitz-stetig ist, indem Sie jeweils die optimale Lipschitzkonstante berechnen. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 15. März 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.