Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 — 28. Februar 2020

Aufgabenblatt 3

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Fundamentalsysteme)* Seien $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Rechnen Sie jeweils nach, dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichung lösen, und berechnen Sie die zugehörige Wronskideterminante. Dann ergibt sich:

(a) Die Funktionen $f(x) = e^{2x}$ und $g(x) = xe^{2x}$ bilden ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y'' = 4y' - 4y$.

(b) Die Funktionen $f(x) = x^n$ und $g(x) = x^{-n}$ (für $x > 0$) bilden ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y'' + \frac{1}{x}\, y' - \frac{n^2}{x^2}\, y = 0 \quad (x > 0)\,.$ (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Konstante Koeffizienten)* Finden Sie jeweils Lösungen zu den angegebenen Anfangsbedingungen:

(a) $y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 9.$

(b) $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0, \qquad y(0) = 1/2,\ y'(0) = 7/2.$

(c) $y''(x) + 4y'(x) + 7y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2\sqrt{3}.$ (6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung)* Konstruieren Sie, wie in der Vorlesung angegeben, die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 4\ln(x) \quad (x > 0)\,.$

(b) $y'' - 4y' + 4y = x\,.$ (6 Punkte)

Zusatzfrage: Wie lautet die Lösung der DGL $y'' - 4y' + 4y = |x|$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$?

Aufgabe 4. *(Konstruktion von Fundamentalsystemen)* (a) Sei $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ mit $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Konstruieren Sie eine weitere, von φ linear unabhängige Lösung ψ auf I mit dem Ansatz $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$. (Es ergibt sich eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für u'.)

(b) Wenden Sie dieses Prinzip nun an, um ausgehend von $\varphi(x) = x$ ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\, y' + \frac{2}{1-x^2}\, y = 0 \qquad (0 < x < 1)\,.$$

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 13. März 2020, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.