

Aufgabenblatt 3

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*Lineare Differentialgleichung erster Ordnung*) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben.

(a) $y'(1+x) - 4y = 2(1+x)^2$, $y(0) = 3$.

(b) $y' + y \sin(x) = \sin(2x)$, $y(0) = 4 + e$. (6 Punkte)

Aufgabe 2. (*Fundamentalsystem*) Sei $\lambda > 0$. Rechnen Sie nach, dass die Funktionen $\varphi_1(x) = \sinh(\lambda x)$ und $\varphi_2(x) = \cosh(\lambda x)$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' = \lambda^2 y$$

bilden und berechnen Sie die zugehörige Wronski-Determinante. (2 Punkte)

Aufgabe 3. (*Konstante Koeffizienten*) Finden Sie jeweils Lösungen der Differentialgleichungen zu den angegebenen Anfangsbedingungen:

(a) $y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

(b) $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

(c) $y''(x) - 12y'(x) + 36y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$. (6 Punkte)

Aufgabe 4. (*Inhomogene lineare Differentialgleichung*) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad (x > 0).$$

Anleitung: Finden Sie erst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mithilfe der Substitution $u = y'$. Verwenden Sie dann den Ansatz aus der Vorlesung. (3 Punkte)

Aufgabe 5. (*Konstruktion von Fundamentalsystemen*) (a) Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ mit $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Konstruieren Sie eine weitere, von φ linear unabhängige Lösung ψ auf I mit dem Ansatz $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$. (Es ergibt sich eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für u' .)

(b) Wenden Sie dieses Prinzip nun an, um ausgehend von $\varphi(x) = x^n$ ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{n^2}{x^2}y = 0 \quad (x > 0). \quad (3 \text{ Punkte})$$

Abgabe: Donnerstag, den 15. März 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.