Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 14. März 2018

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1. *(Integraloperator)* Sei $x_1 > 0$. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x ty(t)\,dt \quad (x \in [0, x_1])$$

eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Berechnen Sie nun die Lösung einerseits durch Zurückführung auf ein Anfangswertproblem und andererseits durch sukzessive Approximation mit Hilfe des implizit gegebenen Integraloperators beginnend bei $y_0 = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Picardsches Iterationsverfahren)* Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld, definiert durch $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 2 \end{pmatrix}$, und sei $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung $Y' = F(Y)$ zur Anfangsbedingung $Y(0) = Y_0$ mithilfe des im Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes verwendeten Iterationsverfahrens.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Exponentialabbildung)* Seien A, B, S reelle $n \times n$–Matrizen. Schliessen Sie aus der Definition der Exponentialmatrix folgende Eigenschaften:

(a) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls $AB = BA$. (b) e^A ist invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(c) Hat A den Eigenwert λ, dann hat e^A den Eigenwert e^λ.

(d) Ist S invertierbar, dann ist $S^{-1}e^{tA}S = e^{t(S^{-1}AS)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Räumliche Drehungen)* Sei $0 \neq w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben, $t \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass die Multiplikation mit der Matrix e^{tA} eine räumliche Drehung um die Drehachse durch w beschreibt. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Liealgebra)* Bezeichne $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid B \cdot B^T = E\}$ die orthogonale Gruppe. Sei weiter $\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie:

(a) Sind $R, S\colon I \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ differenzierbar, so gilt $\frac{d}{dt}(R(t)S(t)) = R'(t)S(t) + R(t)S'(t)$ für alle $t \in I$.

(b) $A \in \mathrm{Lie}(G) \iff A$ ist schiefsymmetrisch $\iff$ es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $R\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G$ mit $R(0) = E$ und $R'(0) = A$.

(c) $\mathrm{Lie}(G)$ ist ein linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $[A, B] := AB - BA \in \mathrm{Lie}(G)$ für alle $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$.

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 22. März 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.