Aufgabenblatt 4

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Projektionsabbildung)* Sei $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, definiert durch die Vorschrift

$$P(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5x - y - 2z \\ -x + 5y - 2z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation mit welcher Matrix kann man P beschreiben (bezogen auf das x-y-z-Koordinatensystem)? Zeigen Sie, dass $P(v)$ in der Ebene liegt, die durch die Gleichung $x + y + 2z = 0$ gegeben ist, und dass für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt $P(P(v)) = P(v)$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Zusammensetzung linearer Abbildungen)* Sei D_α die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α, S die Spiegelung an der x-Achse und S_β die Spiegelung an der Geraden g durch 0, die mit der x-Achse den Winkel β bildet. Durch welche Matrizen werden die zusammengesetzten Abbildungen $L = S \circ D_\alpha \circ S$ bzw. $L = S_\beta \circ D_\alpha \circ S_\beta$ beschrieben? Was für Abbildungen sind das? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Scherung)* Seien v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Als Scherung an der Geraden durch v_1 bezeichnet man die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(v_1) = v_1$ und $L(v_2) = v_2 + av_1$. Durch welche Matrix bezogen auf das Koordinatensystem zur Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ wird L beschrieben? Berechnen Sie $L(L(v_2)) = L^2(v_2)$ und allgemeiner $L^n(v_2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wohin konvergiert die Gerade durch $L^n(v_2)$ für $n \to \infty$? (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Matrizen zu linearen Abbildungen)* Sei V bzw. W der Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 2 bzw. ≤ 4. Sei $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ der Raum der reellen 2×2-Matrizen. Rechnen Sie nach, dass die folgenden Abbildungen linear sind und bestimmen Sie (nach Wahl geeigneter Basen) jeweils die entsprechende Matrix.

(a) $L\colon V \to W$, $L(p)(x) = \int_0^x (1 - t)\, p(t)\, dt$. (b) $L\colon V \to V$, $L(p)(x) = p(x - 2)$.

(c) $L\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $L(A) = \mathrm{Spur}(A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. (Unter der Spur einer 2×2-Matrix versteht man die Summe ihrer Diagonaleinträge.) (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Geometrie)* Eine affine Gerade in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form $\{u + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei $u, w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, fest gewählt sind. (Dabei gibt w die Richtung der Geraden an.) Sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: (a) L bildet jede affine Gerade in $\mathbb{R}^n$ auf eine affine Gerade in $\mathbb{R}^m$ oder auf einen Punkt ab. (b) Ist $n = m$ und L umkehrbar, dann gehen je zwei parallele Geraden unter L wieder über in parallele Geraden. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 22. März 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.