Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 15. März 2018

Aufgabenblatt 4

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Projektionsabbildung)* Sei $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, definiert durch die Vorschrift

$$P(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(x+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}(2y-x+z)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation mit welcher Matrix kann man P beschreiben (bezogen auf das x-y-z-Koordinatensystem)? Zeigen Sie, dass $P(v)$ in der Ebene liegt, die durch die Gleichung $x+y-z=0$ gegeben ist, und ausserdem $P(P(v)) = P(v)$ $(\forall v \in \mathbb{R}^3)$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Zusammensetzung linearer Abbildungen)* Sei D die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um $45°$ und S_α die Spiegelung an der Geraden g durch 0, die mit der x-Achse den Winkel $30°$ bildet. Durch welche Matrizen werden die zusammengesetzten Abbildungen $L_1 = D \circ S_\alpha$ und $L_2 = S_\alpha \circ D$ beschrieben? Zeichnen Sie jeweils die Wirkung von L_1 bzw. L_2 auf das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$. Gibt es einen Unterschied? (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Matrizen zu linearen Abbildungen)* Sei $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$, vorgegeben. Rechnen Sie nach, dass die folgenden Abbildungen tatsächlich linear sind und finden Sie jeweils die entsprechende Matrix (bzgl. der kanonischen Basen).

(a) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $L(v) = w \times v$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $L(v) = \langle 3v, w \rangle \cdot w$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

(c) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $L(v) = \det(v, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. (6 Punkte)

Aufgabe 4. *(Scherung)* Seien v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Als Scherung an der Geraden durch v_1 bezeichnet man die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(v_1) = v_1$ und $L(v_2) = v_2 + av_1$. Durch welche Matrix bezogen auf das Koordinatensystem zur Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ wird L beschrieben? Berechnen Sie $L(L(v_2)) = L^2(v_2)$ und allgemeiner $L^n(v_2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wohin konvergiert die Gerade durch $L^n(v_2)$ für $n \to \infty$? (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Flächentreue)* Sei A eine invertierbare 2×2–Matrix und $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit Seiten, die parallel zur x-Achse bzw. y-Achse verlaufen. Zeigen Sie, dass $L_A(K)$ ein Parallelogramm ist und dass der Flächeninhalt von K und $L_A(K)$ genau dann übereinstimmen, wenn $|\det(A)| = 1$ ist. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 22. März 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.