Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. *(Phasenbilder linearer Vektorfelder)* Skizzieren Sie die Phasenbilder der Flüsse zu den ebenen Vektorfeldern, definiert durch Multiplikation mit diesen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

(7 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lineare Systeme mit verschwindender Determinante)* Bestimmen Sie die möglichen Normalformen einer 2×2-Matrix A mit $\det A = 0$ und die Phasenbilder der Flüsse der dazugehörigen linearen Vektorfelder. Wie sieht das Phasenbild konkret aus für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Gradientenlinien)* Finden Sie für das Gradientenvektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{-x^2} \\ 2y \end{pmatrix}$ eine Stammfunktion und bestimmen Sie die Niveaumengen. Zeichnen Sie die nun Niveaulinien und skizzieren Sie den Verlauf der Gradientenlinien (mit Orientierung).

(2 Punkte)

Aufgabe 4. *(Volumentreue)* Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, F das Vektorfeld, definiert durch $F(X) = AX$ (für $X \in \mathbb{R}^n$), und bezeichne φ den zugehörigen Fluss. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{div}(F)(p) = 0 \ \forall p \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Spur}(A) = 0.$

(b) Das Vektorfeld F ist divergenzfrei genau dann, wenn φ_t (für alle t) volumentreu ist. (Das heisst, unter der Transformation φ_t bleibt das Volumen jeder kompakten messbaren Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ erhalten.)

(c) φ_t ist genau dann winkel- und längentreu (für alle t), wenn A schiefsymmetrisch ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Liealgebra der Lorentzgruppe)* Sei $J \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gegeben. Weiter sei $G = \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid B^T JB = J\}$ und $\mathrm{Lie}(G) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ (wie in Aufgabe 5, Blatt 4). Zeigen Sie:

(a) $A \in \mathrm{Lie}(G) \quad \Longleftrightarrow \quad A^T J + JA = 0.$

(b) $\mathrm{Lie}(G)$ ist ein linearer Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $[A, B] := AB - BA \in \mathrm{Lie}(G)$ für alle $A, B \in \mathrm{Lie}(G)$.

(c) Was erhalten Sie für $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ bzw. für $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Welche Dimension hat hier jeweils $\mathrm{Lie}(G)$? (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 5. April 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.