Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 22. März 2019

Aufgabenblatt 5

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Kern und Bild)* Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix wird L beschrieben? Berechnen Sie den Kern von L und geben Sie eine Basis für das Bild von L an. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Vektorprodukt)* Rechnen Sie nach, dass die Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

linear ist. Durch Multiplikation mit welcher Matrix wird L beschrieben? Berechnen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Basiswechsel)* Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $L(e_1) = -2e_1 - 6e_2$ und $L(e_2) = \frac{3}{2}e_1 + 4e_2$. Wie lautet die Matrix B von L bezogen auf die Basis $\mathcal{B}$, gebildet aus $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$? (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Räumliche Spiegelung)* Sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $L(v_2) = v_2$ und $L(v_3) = -v_3$. Wie lautet die Matrix B von L bezogen auf die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$? Wie lautet die Matrix C von L bezogen auf die Basis $\mathcal{C} = (e_2, -e_3, e_1)$? (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Lineare Differentialoperatoren)* Der Operator D auf $V = C^\infty(\mathbb{R})$ sei definiert durch $D(f)(x) := f''(x) - f'(x) - 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f \in V$. Rechnen Sie nach, dass D linear ist und bestimmen Sie Kern und Bild. Zeigen Sie, dass D den Unterraum $W := \{p(x)\, e^{2x} \mid p \text{ Polynom von Grad } \leq 2\} \subset V$ in sich abbildet, und bestimmen sie wiederum Kern und Bild. Berechnen Sie das Urbild $D^{-1}(e^{2x}) = \{f \in W \mid f''(x) - f'(x) - 2f(x) = e^{2x}\}$. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 29. März 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.