Aufgabenblatt 5

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Kern und Bild)* Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 - 5x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix wird L beschrieben? Berechnen Sie den Kern von L und geben Sie eine Basis für das Bild von L an. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Basiswechsel)* Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $L(e_1) = 7e_1 + 2e_2$ und $L(e_2) = 3e_1 + 8e_2$. Wie lautet die Matrix $M_{\mathcal{B}}(L)$ von L bezogen auf die Basis $\mathcal{B}$, gebildet aus $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Räumliche Spiegelung)* Sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $L(v_1)$, $L(v_2)$ und $L(v_3)$. Wie lautet die Matrix B von L bezogen auf die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$? Wie lautet die Matrix C von L bezogen auf die Basis $\mathcal{C} = (e_2, e_1, e_3)$? (5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Kern und Bild)* Konstruieren Sie eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$, so dass der Kern die Gerade durch $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und das Bild die x-z-Ebene ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Lineare Differentialoperatoren)* Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Durch die Vorschrift

$$D(f)(x) := f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f \in V$$

wird eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$ definiert. Wieso?

(a) Bestimmen Sie den Kern und das Bild dieser linearen Abbildung.

(b) Der Operator D liefert auch eine lineare Selbstabbildung des Unterraums $P \subset V$ aller Polynome von Höchstgrad 3. Durch welche Matrix wird D bezüglich der Basis $(1, x, x^2, x^3)$ von P beschrieben? Was ist hier Kern und Bild? (4 Punkte)

Abgabe: Ausnahmsweise Mittwoch, den 28. März 2018, bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.