Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen | Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 | 3. April 2018

Aufgabenblatt 6

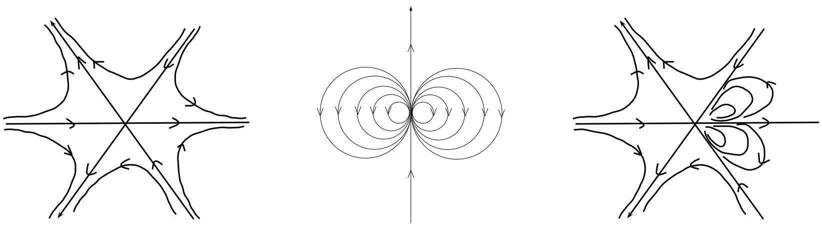
Aufgabe 1. *(Stabilität)* Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Vektorfelder und entscheiden Sie jeweils, welche dieser Punkte stabil, asymptotisch stabil oder instabil sind.

(a) $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 - 4x \\ 2x - y \end{pmatrix}$ (b) $F(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 4x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$.

Hinweis zu (b): Geeignete Ljapunov-Funktion suchen. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Stabilität bei linearen Vektorfeldern)* Beweisen Sie das Stabilitätskriterium 2.4.2 für den Fall, dass die Matrix A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3. *(Index einer Nullstelle eines Vektorfeldes)* (a) Bestimmen Sie für die Vektorfelder mit den skizzierten Phasenbildern jeweils den Index des zentralen Punktes, indem Sie graphisch feststellen, wie oft das Vektorfeld längs einer passenden Kreislinie um das Zentrum dreht.



(b) Skizzieren Sie ein passendes Phasenbild eines Vektorfeldes mit isolierter Nullstelle, so dass der Index der Nullstelle $+3$ ist und weiteres, so dass der Index -4 ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. *(Glykolysemodell)* (a) Seien $a, b > 0$ gegeben. Rechnen Sie nach, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} -x + (a + x^2)y \\ b - (a + x^2)y \end{pmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

genau eine stationäre Lösung bei $p = (b, b/(a + b^2))$ hat und berechnen Sie $\det(DF_p)$ und $\mathrm{Spur}(DF_p)$.

(b) Wie ist das Stabilitätsverhalten bei p, wenn $a = \frac{1}{16}$ und $b^2 = \frac{7}{16}$ ist?

(c) Sei K das kompakte Gebiet im ersten Quadranten, das durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = c_1 - x$ und $y = c_2 + x$ begrenzt wird. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld F auf dem Rand von K stets ins Innere des Gebietes zeigt, wenn man die Konstanten c_1, c_2 gross genug wählt. (6 Punkte)

Aufgabe 5. *(Eulercharakteristik des Torus)* Beweisen Sie Satz 2.5.10 für den Torus (analog zum Beweis für die 2-Sphäre mithilfe passender flacher Karte). (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12. April 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.