Aufgabenblatt 6

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Eigenwerte und Eigenräume)* Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Diagonalisierbarkeit)* Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Welche sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -\sqrt{5} \\ -2 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 13 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ (5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Charakteristisches Polynom)* Beweisen Sie Satz 2.3.9 für $n = 3$:

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom einer 3×3-Matrix.

(b) Schliessen Sie nun, dass $p_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{Spur}(A) \cdot \lambda^2 + c(A) \cdot \lambda - \det(A)$. Wie hängt der Koeffizient $c(A)$ mit den Einträgen von A zusammen?

(c) Beweisen Sie, dass die Spur von A mit der Summe und die Determinante von A mit dem Produkt der Nullstellen von p_A (mit Vielfachheit gezählt) übereinstimmt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Dimension von Eigenräumen)* Seien A, T zwei $n \times n$-Matrizen und T invertierbar. Die Matrix A habe den Eigenwert λ, der dazugehörige Eigenraum sei der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der λ-Eigenraum der Matrix $B = TAT^{-1}$ mit $TU := \{Tv \mid v \in U\}$ übereinstimmt. Schliessen Sie daraus, dass die Dimension eines Eigenraums bei jedem Basiswechsel erhalten bleibt. Insbesondere haben A und B dieselben Eigenwerte. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Eigenwerte)* Seien A, B invertierbare $n \times n$–Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(b) Die Matrizen AB und BA haben dieselben Eigenwerte. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 5. April 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.