Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 11. April 2018

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. *(Hügelfunktion)* Sei $a > 0$ fest gewählt und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-a^2}} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist und skizzieren Sie den Verlauf der Funktion f. Modifizieren Sie die Funktion f jetzt so, dass sie an einer vorgegebenen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ ihr Maximum annimmt, ausserhalb des Intervalls (x_0-a, x_0+a) verschwindet, und die Gesamtfläche unter dem Graphen 1 beträgt. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Euler-Lagrange-Gleichung)* Stellen Sie zu den folgenden Funktionalen jeweils die Euler-Lagrange-Gleichung auf und bestimmen Sie die Lösungen:

(a) $I(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 (\varphi'(x)^2 - \lambda\varphi(x)^2)\, dx$ für $\varphi \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ ($\lambda > 0$ vorgegeben).

(b) $I(\varphi) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\varphi'(x))}{(x+1)(x+2)}\, dx$ für $\varphi \in C^2([1,2],\mathbb{R})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Variationsproblem)* Seien $p = (x_1, y)$, $q = (x_2, y)$ Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2$, $y > 0$. Bezeichne Z die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varphi(x_1) = y$, $\varphi(x_2) = y$. Finden Sie diejenige Funktion $\varphi \in Z$, für die das folgende Integral den kleinstmöglichen Wert annimmt:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}{\varphi(x)}\, dx\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Unendlich viele Extremalkurven)* Betrachten wir das Funktional I, definiert durch

$$I(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\varphi(x)\varphi'(x)\cos(x) - \varphi(x)^2\sin(x))\, dx\,,$$

für $\varphi \in C^1([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$. Zeigen Sie, dass es hier unendlich viele φ gibt, bei denen I den minimalen Wert annimmt. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Variationsproblem)* (a) Seien a_0, a_1 Konstanten. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für $y(x)$ der Form $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ mit der Substitution $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$, in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt werden kann.

(b) Finden Sie jetzt diejenige Kurve $\varphi \in C^2([1,e])$ mit $\varphi(1) = 10$, $\varphi(e) = \frac{12}{\sqrt{e}}$, für die das Integral

$$I(\varphi) = \int_1^e (x^2\,\varphi'(x)^2 - \frac{1}{4}\varphi(x)^2)\, dx$$

den minimalen Wert annimmt. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 19. April 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.