Aufgabenblatt 7

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(gekoppelte Differentialgleichungen)* Finden Sie für die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen jeweils die allgemeinen Lösungen.

(a) $$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) - 2x_2 + 4x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t) \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1'(t) &= 10x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= -6x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Räuber-Beute-Modell)* Bestimmen Sie mit Satz 2.5.7 die Lösungen des Differentialgleichungssystems zu den angegebenen Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= 10x_1(t) - 12x_2(t) \end{aligned}, \qquad x_1(0) = 4, x_2(0) = -6.$$

Rechnen Sie nach, dass die von Ihnen gefundenen Funktionen x_1, x_2 wirklich das Differentialgleichungssystem lösen. Wogegen konvergieren $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für $t \to \infty$? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Orthonormalisierungsverfahren)* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -7 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -3. Berechnen Sie den zugehörigen Eigenraum $V \subset \mathbb{R}^4$ von A und konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für V. Bestimmen Sie nun die senkrechte Projektion von $w = (1, -1, 2, 2)^T$ auf V. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Scherungstyp)* (a) Lösen Sie die beiden gekoppelten Differentialgleichungen $x_1'(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t)$, $x_2'(t) = \lambda x_2(t)$ (wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest gewählt sei).

(b) Sei A eine 2×2-Matrix mit $T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, und $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ erfülle $X'(t) = B\,X(t)$. Schliessen Sie, dass für $\tilde{X}(t) = T \cdot X(t)$ gilt $\tilde{X}'(t) = A\,\tilde{X}(t)$.

(c) Lösen Sie nun das System $\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 8x_2(t) \end{aligned}$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Orthonormalbasis für Polynome)* Sei V der Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx \quad \text{für Polynome } p, q\,.$$

Konstruieren Sie ausgehend von der Basis von V, gebildet aus $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = \sqrt{3}\,x$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^3$, eine Orthonormalbasis für V, und zwar mit dem in der Vorlesung beschriebenen Orthonormalisierungsverfahren. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 12. April 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.