Aufgabenblatt 7

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Normalformen)* Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Matrizen anhand ihrer Eigenwerte und geben Sie die Transformationsmatrix T an, die den entsprechenden Basiswechsel beschreibt.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (6 Punkte)

Aufgabe 2. *(gekoppelte Differentialgleichungen)* Finden Sie für die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen jeweils die allgemeinen Lösungen.

(a) $\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) - 2x_2 + 4x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t) \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 5x_2(t) \end{aligned}$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Räuber-Beute-Modell)* (a) Bestimmen Sie mit Satz 2.5.7 die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 5x_2 \end{aligned}$.

(b) Rechnen Sie nach, dass die in Satz 2.5.7 angegebene vektorwertige Funktion wirklich eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist. (3 Punkte)

Aufgabe 4. *(Scherungstyp)* Sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. (a) Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen $x_1'(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t)$, $x_2'(t) = \lambda x_2(t)$.

(b) Sei A eine 2×2-Matrix mit $T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ erfülle $X'(t) = B\,X(t)$. Schliessen Sie, dass für $\tilde{X}(t) = T \cdot X(t)$ gilt $\tilde{X}'(t) = A\,\tilde{X}(t)$.

(c) Berechnen Sie nun die Lösungen des Systems $\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) - 8x_2(t) \end{aligned}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Normalformen)* Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Matrizen anhand ihrer Eigenwerte und falls nötig der Dimension der Eigenräume. Die dazugehörigen Basiswechsel brauchen nicht berechnet zu werden.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12. April 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.