Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1. *(Mehrdimensionales Problem)* Für jeden zweimal stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ mit Komponenten $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sei

$$I(\gamma) := \int_0^{\pi/2} (\dot{x}(t)^2 + 2\dot{y}(t)^2 + 4\sqrt{2}\, x(t)y(t) + 3x(t)^2)\, dt\,.$$

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und bestimmen Sie die Lösung zu den Randbedingungen: $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 4e^{-\pi} - 1 \\ \sqrt{2}(e^{-\pi}+1) \end{pmatrix}$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Minimalflächen)* Seien $r > L > 0, c > 0$ gegeben, wobei $\cosh(cL) = cr$.

(a) Berechnen Sie die Oberflächen der Rotationsflächen, die durch Rotation der folgenden Graphen um die x-Achse entstehen (für jeweils $x \in [0, 2L]$):

(i) $\varphi(x) = r$; (ii) $\varphi(x) = \frac{1}{c}(\cosh(c(x-L)))$; (iii) $\varphi(x) = \frac{r}{L}(x-L)$.

(b) Angenommen, es gibt zwei $0 < c_1 < c_2$ mit $\frac{1}{c_1}\cosh(c_1 L) = \frac{1}{c_2}\cosh(c_2 L)$. Welche der beiden entsprechenden Rotationsflächen realisiert dann eine Minimalfläche? (5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Extrema unter Nebenbedingung)* Sei $r > 0$ vorgegeben. Bestimmen Sie die lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y,z) = x + y$ auf der Torusfläche in $\mathbb{R}^3$, definiert durch $g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3r^2)^2 - 16r^2(x^2+y^2) = 0$.

Hinweis: Sie können den Ansatz $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) verwenden oder geometrisch argumentieren. (5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Kettenlinie)* Die Form, die eine an zwei Punkten gleicher Höhe im Abstand $2a$ aufgehängte, homogene Kette vorgegebener Länge L annimmt, bezeichnet man als Kettenlinie. Die entsprechende Funktion $\varphi \in C^2[-a,a]$ mit $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ realisiert das Minimum von

$$I(\varphi) := \int_{-a}^{a} \varphi(x)\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$$

unter der Nebenbedingung $N(\varphi) := \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\, dx = L$. Dabei sind $a > 0$ und $L > 2a$ vorgegeben. Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung (in der vereinfachten Form und mit Lagrange-Multiplikator) auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung. Finden Sie nun die gesuchte Minimalkurve für $a = 1$ und $L = 4\sinh(1/2) = 2(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}})$.

(5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 26. April 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.