Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden II — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 12. April 2018

Aufgabenblatt 8

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Orthonormalisierungsverfahren)* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -7 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -3. Berechnen Sie den zugehörigen Eigenraum $V \subset \mathbb{R}^4$ von A und konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für V. Bestimmen Sie nun die senkrechte Projektion von $w = (1, -1, 2, 2)^T$ auf V. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Ellipse oder Hyperbel)* Schreiben Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils mithilfe einer symmetrischen Matrix, bestimmen Sie deren Eigenwerte und Eigenvektoren und skizzieren Sie dann die Lösungsmenge.

(a) $5x^2 + 4\sqrt{6}\, xy + 3y^2 = 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $11x^2 - 14\sqrt{2}\, xy + 18y^2 = 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Hauptachsen einer symmetrischen Matrix)* Finden Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & -1 \\ \sqrt{5} & 4 & -\sqrt{5} \\ -1 & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Ist die Lösungsmenge der Gleichung $q_A(x, y, z) = 1$ ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid? (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Orthogonale Matrizen)* Sei A eine orthogonale $n \times n$-Matrix, das heisst, die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgendes:

(a) Ist $n = 2$, so ist A entweder eine Drehmatrix oder eine Spiegelungsmatrix.

(b) Ist $n = 3$, hat A den Eigenwert 1 und ist $\det(A) = 1$, dann beschreibt A eine räumliche Drehung. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Symmetrische Matrizen)* Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie für $n = 2$ oder 3, dass A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, in folgenden Schritten.

(a) Rechnen Sie nach, dass im Fall $n = 2$ die Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte hat oder ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

(b) Sei jetzt $n = 3$, v ein Eigenvektor von A zu einem reellen Eigenwert λ und U die zu v senkrechte Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch 0. Zeigen Sie: $Au \in U$ für alle $u \in U$. Schliessen Sie nun die Behauptung durch Wahl eines passenden Koordinatensystems mit (a).

(3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 19. April 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.