Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2018 — 24. April 2018

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1. *(Dirichletproblem)* Sei u die harmonische Fortsetzung einer stetigen Funktion f, definiert auf $\partial K_R(p) \subset \mathbb{R}^2$ (mit $p = (x_0, y_0)$) aufs Innere der Kreisscheibe. Zeigen Sie:

$$u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\,.$$

Dabei bezeichnen a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von f, aufgefasst als Funktion von φ. Finden Sie nun eine Lösung des Dirichletproblems auf der Kreisscheibe von Radius 5 um den Nullpunkt für die Randwerte $f(x,y) = x^2y^2 + 10x^2$ für $x^2 + y^2 = 25$. Wie lautet eine entsprechende holomorphe Funktion, die u als Realteil hat? (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Dirichletproblem auf Streifen)* Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Laplacegleichung $\Delta u(x,y) = 0$ im Streifen $\Omega := \{(x,y) \mid 0 < y < 1\}$ mit der Randbedingung $u(x,0) = u(x,1) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, unendlich viele linear unabhängige Lösungen besitzt. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Maximumsprinzip? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Invarianz des Laplaceoperators)* Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator invariant ist unter orthogonalen Basiswechseln und Verschiebungen. Das heisst: für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ und jede orthogonale $n \times n$–Matrix A gilt:

$$\Delta((u(Ax+b)) = (\Delta u)(Ax+b) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Für $n = 2$: Wieso hat der Differentialoperator $D = \partial_x + \partial_y$ nicht diese Eigenschaft? (3 Punkte)

Aufgabe 4. *(Glattheit)* Die stetige Funktion $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfülle die Mittelwerteigenschaft, das heisst, für jede abgeschlossene Kreisscheibe $K_R(p) \subset \Omega$ gelte

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + Re^{i\varphi})\, d\varphi\,.$$

Sei weiter g eine rotationssymmetrische, beliebig oft differenzierbare Funktion mit Träger $K_\epsilon(0)$ und $\int_{K_\epsilon(0)} g(x,y)\, d^2(x,y) = 1$ (siehe Aufgabe 1, Blatt 7). Zeigen Sie zuerst

$$(u * g)(p) = \int_0^R \int_0^{2\pi} u(p - re^{i\varphi})\, g(re^{i\varphi})\, r\, dr\, d\varphi = u(p) \quad \text{falls } K_R(p) \subset \Omega \text{ und } \epsilon < R\,.$$

Schliessen Sie hieraus, dass u bereits beliebig oft differenzierbar ist. (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Poissonformel)* Sei $\Omega = K_R(0) \in \mathbb{R}^2$ und $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch auf Ω. Zeigen Sie (mithilfe der Cauchyformel), dass dann für alle $p \in \Omega$ gilt:

$$u(p) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K_R(0)} \frac{R^2 - ||p||^2}{||p-q||^2}\, u(q)\, ds(q)\,.$$

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 3. Mai 2018, bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.