

Aufgabenblatt 9

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*Ellipse oder Hyperbel*) Schreiben Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils mithilfe einer symmetrischen Matrix, bestimmen Sie deren Eigenwerte und Eigenvektoren und skizzieren Sie dann die Lösungsmenge.

(a) $4x^2 - 10xy + 4y^2 = 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $19x^2 - 6xy + 11y^2 = 10$ für $x, y \in \mathbb{R}$. (6 Punkte)

Aufgabe 2. (*Ellipsoid oder Hyperboloid*) Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei der Lösungsmenge der folgenden Gleichungen um ein Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid handelt.

(a) $x^2 + 3y^2 - 5z^2 - 2xy = 1$ (b) $2x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xz = 1$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(c) $6xy + 6xz + 6yz - x^2 - y^2 - z^2 = 1$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)

Aufgabe 3. (*Brennpunkte*) Seien a, b vorgegebene positive Zahlen und $f := \sqrt{a^2 + b^2}$. Rechnen Sie nach, dass ein Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllt, wenn die Differenz seiner Abstände zu den Brennpunkten $F_1 = (f, 0)$ und $F_2 = (-f, 0)$ gleich $2a$ oder gleich $-2a$ ist. (3 Punkte)

Aufgabe 4. (*Räumliche Drehung*) Sei V der lineare Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der aus allen Vektoren besteht, die auf $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für V . Finden Sie nun heraus, durch welche Matrix (bezogen auf die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$) die räumliche Drehung um die durch w erzeugte Drehachse um 90 Grad (im Rechtsschraubendreh Sinn) beschrieben wird. (3 Punkte)

Aufgabe 5. (*Orthogonale Matrizen*) Sei A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, das heißt, die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist $n = 2$, so ist A entweder eine Drehmatrix oder eine Spiegelungsmatrix. Ist insbesondere A sowohl orthogonal als auch symmetrisch, dann handelt es sich um eine Spiegelungsmatrix.

(b) Welche 3×3 -Matrizen sind sowohl orthogonal als auch symmetrisch? (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 26. April 2019, in der Vorlesung oder bis 12.30 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.