Aufgabenblatt 9

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Quadratische Gleichungen)* Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei der Lösungsmenge der Gleichung in drei reellen Variablen um ein Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder eine sonstige Figur handelt. Machen Sie eine Skizze in einem passend gewählten Koordinatensystem (ohne die Achsen explizit zu berechnen).

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz - 6yz = 1$. (b) $2x^2 + 8y^2 + 3z^2 + 8xy = 1$.

(c) $-6xy + 2xz + 2yz - 4z^2 = 1$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Weglänge)* Berechnen Sie die Längen der folgenden Wege:

(a) $\gamma(t) = (e^{3t}\cos(4t), e^{3t}\sin(4t))$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ für $0 \leq t \leq a$ ($a > 0$ vorgegeben).

(c) $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ für $0 \leq t \leq 1$. (5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Niveaulinien)* Bestimmen und skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen in zwei Variablen jeweils die Niveaumengen $N_c(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$, und zwar für $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ und $c = 2$.

(a) $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 6y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 8xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Funktionsgraphen)* Wie sehen die Funktionsgraphen der folgenden Funktionen aus? Bestimmen Sie jeweils zunächst den Verlauf oberhalb der x-Achse und oberhalb der y-Achse und die Schnittfigur mit einer Ebene parallel zur x-y-Ebene.

(a) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ($x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 \leq 4$).

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$ $((x, y) \neq (0, 0))$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Brennpunkte)* Seien a, b vorgegebene positive Zahlen und $f := \sqrt{a^2 + b^2}$. Rechnen Sie nach, dass ein Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllt, wenn die Differenz seiner Abstände zu den Punkten $F_1 = (f, 0)$ und $F_2 = (-f, 0)$ gleich $2a$ oder gleich $-2a$ ist.

(3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 3. Mai 2018, in der Vorlesung oder bis 17 Uhr im Fachbereich Mathematik an der Spiegelgasse 1.