Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 8. Mai 2019

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. *(Schwingender Ring)* Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion. Das Verhalten eines schwingenden Ringes werde beschrieben durch die eindimensionale Wellengleichung $c^2\partial_x^2 u(x,t) = \partial_t^2 u(x,t)$ mit den Randbedingungen $u(x,t) = u(x+2\pi,t)$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $\partial_t u(x,0) = f'(x)$ (für alle $x,t \in \mathbb{R}$). Konstruieren Sie eine Lösung für dies Problem, indem Sie zunächst Produktlösungen (in kartesischen Koordinaten) bestimmen und dann einen Reihenansatz aufstellen. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Gedämpfte Wellengleichung)* Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. (a) Führen Sie jede Lösung u der Telegraphengleichung $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u + 2k\,\partial_t u$ mit dem Ansatz $v(x,t) = u(x,t)\cdot g(t)$ auf eine Lösung der gedämpften Wellengleichung $\partial_x^2 v = \partial_t^2 v - k^2 v$ zurück.

(b) Zeigen Sie: Ist $v(x,t)$ eine Lösung der gedämpften Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen $v(x,0) = f(x)$ und $\partial_t v(x,0) = 0\ \forall x$, dann ist die Funktion $w(x,y,t) = v(x,t)\cdot e^{ky}$ eine Lösung der Wellengleichung $\partial_x^2 w + \partial_y^2 w = \partial_t^2 w$ mit $w(x,y,0) = f(x)\cdot e^{ky}$ und $\partial_t w(x,y,0) = 0$. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Potenzreihenansatz)* Sei $\nu \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben. Bestätigen Sie die Gestalt der in 5.4.1 angegebenen analytische Lösung J_ν der Besselschen Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})f(x) = 0 \quad (x > 0)\,,$$

die in der Nähe von $x = 0$ beschränkt bleibt, indem Sie den Potenzreihenansatz $f(x) = x^\nu(1 + \sum_{k=1}^\infty a_k x^k)$ verwenden, und für die Koeffizienten a_k rekursive Bedingungen herleiten. Überprüfen Sie, dass der Konvergenzradius Ihrer Reihe ∞ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Nullstellenvergleichssatz)* Für $u, v \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ gelte

$$u''(x) = q(x)\,u(x) \quad \text{und} \quad v''(x) = q_0(x)\,v(x) \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dabei seien q, q_0 stetige Funktionen auf $[a,b]$ mit $q(x) < q_0(x)$ für alle x. Seien weiter $\alpha < \beta$ zwei aufeinanderfolgende einfache Nullstellen von v, also $v(x) \neq 0$ für alle $x \in (\alpha,\beta)$. Beweisen Sie: u hat eine Nullstelle zwischen α und β.

Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen von $W = uv' - u'v$ auf $[\alpha,\beta]$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Besselfunktionen)* Bezeichne J_ν die ν-te Besselfunktion (siehe Aufgabe 3).

(a) Rechnen Sie nach, dass die Funktion $u(x) = \sqrt{x}\,J_\nu(x)$ (für $x > 0$) folgende Differentialgleichung löst: $u''(x) = \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - 1\right) u(x)$.

(b) Schliessen Sie nun (mit Aufgabe 4), dass J_ν abzählbar unendlich viele positive Nullstellen hat, die gegen ∞ konvergieren. Wieso sind alle diese Nullstellen von J_ν einfach?

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 16. Mai 2019, bis 12 Uhr im Mathematischen Institut.