Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 — 20. Februar 2020

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. *(Bernoulli Differentialgleichung)* Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{2x} + \sqrt{y}\,, \quad y(1) = 1\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Variablentransformation)* (a) Zeigen Sie, dass man eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x}) \quad (x \neq 0)$, wobei f eine stetige Funktion in einer Variablen ist, mithilfe der Substitution $u = \frac{y}{x}$ so transformieren kann, dass sie anschliessend durch Trennung der Variablen lösbar ist.

(b) Wenden Sie (a) an, um folgendes Anfangswertproblem zu lösen:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^3}{y^3}\,, \quad y(1) = 2\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Koordinatenwechsel)* Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2x + y + 1}{x + 2y + 2} \quad (y \neq -\frac{x}{2} - 1)\,.$$

Hinweis: Finden Sie passende x_0, y_0, so dass im verschobenen Koordinatensystem $\overline{x} = x - x_0$ und $\overline{y} = y - y_0$ die Differentialgleichung die in Aufgabe 2(a) behandelte Form annimmt. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Exakte Differentialgleichung)* Zeigen Sie, dass man die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2}{(1 - y^2)} \quad (y \neq \pm 1)$$

als eine exakte Differentialgleichung schreiben kann und beschreiben Sie die Lösungen mithilfe der Niveaulinien der entsprechenden Stammfunktion. Beweisen Sie, dass für jede Lösung $y = \varphi(x)$, die für $x \to \infty$ definiert ist, gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -1$. Wie sieht die Schar der maximalen Lösungskurven aus?

(4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Integrierender Faktor)* Berechnen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$(1 + xy)\,dx + x^2\,dy = 0\,.$$

Hinweis: Finden Sie einen integrierenden Faktor $M(xy)$, der nur vom Produkt von x und y abhängt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 27. Februar 2020, bis 14 Uhr im Mathematischen Institut.