Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 25. Februar 2020

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. *(Lineare Operatoren)* Auf $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ wählen wir jeweils die 1-Norm, definiert durch die Summe der Beträge aller Koordinaten. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Berechnen Sie $||A|| := \max\{||Av||_1 \mid v \in \mathbb{R}^n, ||v||_1 = 1\}$.

(b) Schliessen Sie nun, dass jeder lineare Operator zwischen endlich-dimensionalen Banachräumen Lipschitz-stetig ist. (Hinweis: Satz 1.4.6.) (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Konvergenzbegriffe)* (a) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{für } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ auf $[-1, 1]$ im quadratischen Mittel gegen die Nullfunktion konvergiert. Wie steht es mit punktweiser oder gleichmässiger Konvergenz?

(b) Sei jetzt $f_n(x) = |x| \sqrt[n]{|x|}$ für $-1 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert diese Funktionenfolge gleichmässig? Konvergiert sie im Sinne der Norm $|| \cdot ||_1$ auf $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Banachscher Fixpunktsatz)* Das Polynom $f(x) = x^5 + 5x - 5$ hat auf dem Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle, wieso? Überprüfen Sie, ob der Operator $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ das Intervall $[0, 1]$ in sich abbildet und dort kontrahierend ist. Konvergiert also das Newtonverfahren bei beliebiger Wahl des Startwertes in $[0, 1]$ gegen die Nullstelle von f? (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Lipschitzbedingung)* Welche der folgenden Funktionen erfüllen auf den angegebenen Definitionsbereichen eine gleichmässige Lipschitzbedingung bezüglich y? Bestimmen Sie gegebenenfalls die optimale Lipschitz-Konstante.

(i) $f\colon \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$

(ii) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x, y) = 3y + \sin(3x)$

(iii) $h\colon [0, 1] \times \mathbb{R}$, definiert durch $h(x, y) = \begin{cases} x \cdot |y|/2 & \text{für } |y| \leq 2 \\ x \cdot |3y - 5| & \text{für } |y| > 2 \end{cases}$ (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Picardsches Iterationsverfahren)* Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = 2xy^2$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$, und zwar erst durch Trennung der Variablen und dann durch Anwendung des Picardschen Iterationsverfahrens. Wie steht es hier mit der Lipschitzbedingung? (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12. März 2020, bis 14 Uhr im Mathematischen Institut.