Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2020 — 17. März 2020

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. *(Potenzreihenansatz)* Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. (a) Konstruieren Sie mithilfe eines Potenzreihenansatzes ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$(1-t^2)x''(t) - tx'(t) + n^2 x(t) = 0 \quad (t^2 < 1)\,.$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom T_n, das die DGL aus (a) löst und mit $T_n(0) = (-1)^{n/2}$, falls n gerade und $T_n'(0) = (-1)^{(n-1)/2} \cdot n$, falls n ungerade. Ausserdem gilt: $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ für alle $t^2 < 1$.

(c) Schliessen Sie: das Polynom T_n hat auf $]-1,1[$ genau n verschiedene Nullstellen und sämtliche lokalen Maxima und Minima liegen auf der Höhe ± 1. (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Faltung mit Inhomogenität)* Konstruieren Sie für das Anfangswertproblem

$$x'' + x = t^2 \sin(t)\,, \quad x(0) = x'(0) = 0\,,$$

eine Lösung mit der Methode aus Satz 2.3.2. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Exponentialmatrix)* Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Exponentialmatrizen e^{tA}, e^{tB} und $e^{t(A+B)}$ (für $t \in \mathbb{R}$).

(b) Bestätigen Sie die im Skript auf Seite 36 angegebene Gestalt der Exponentialmatrix e^{tJ}, wobei J ein Jordanblock vom Typ $n \times n$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Exponentialabbildung)* Seien A, B, S reelle $n \times n$–Matrizen. Überprüfen Sie mit der Definition der Exponentialmatrix folgende Eigenschaften

(a) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls $AB = BA$. (b) Existiert S^{-1}, dann ist $S^{-1}e^A S = e^{S^{-1}AS}$.

(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^T$, dann ist $B = e^{tA}$ orthogonal, das heisst, $B^T B = E$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Fluss eines Vektorfeldes)* Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F(X) = AX$ $(X \in \mathbb{R}^2)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. Welche Halbgeraden sind hier Bahnen? Skizzieren Sie das Phasenbild. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 26. März 2020, bis 14 Uhr als .pdf per e-mail an Ihren Tutor.