Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1. *(Lineare Vektorfelder)* Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Phasenbilder (im x-y-Koordinatensystem) zu den ebenen Vektorfeldern, definiert durch Multiplikation mit diesen Matrizen. Ist der Nullpunkt jeweils stabil oder instabil, anziehend oder abstossend?

(b) Betrachten Sie nun die um 90^0 gedrehten Vektorfelder und bestimmen Sie wiederum die entsprechenden Phasenbilder. Wie steht es jetzt mit der Stabilität des Nullpunktes?

(6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lineare Systeme mit verschwindender Determinante)* Bestimmen Sie die möglichen Normalformen einer 2×2-Matrix A mit $\det A = 0$ und die Flüsse der dazugehörigen linearen Vektorfelder und die entsprechenden Phasenbilder. Stabilität der Gleichgewichtslagen? Wie sieht das Phasenbild konkret aus für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Gradientenvektorfelder)* Sei $F = \nabla f \colon D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Gradientenvektorfeld auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass es im Phasenbild von F in D keine eindimensionalen, geschlossenen Bahnen geben kann.

(b) Für welche $n \times n$-Matrizen A ist das entsprechende Vektorfeld $F(X) = AX$ ein Gradientenvektorfeld? Was heisst das konkret für $n = 2$? (3 Punkte)

Aufgabe 4. *(Stabilität bei linearen Vektorfeldern)* Beweisen Sie das Stabilitätskriterium 3.4.2 für lineare Vektorfelder für $n = 2$ und $n = 3$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Fluss)* Berechnen Sie den Fluss des ebenen Vektorfeldes:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} (1 - (\sqrt{x^2 + y^2})^{-1})(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)\, x - y \\ x + (1 - (\sqrt{x^2 + y^2})^{-1})(\sqrt{x^2 + y^2}) - 2)\, y \end{pmatrix} \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Wieviele geschlossene Bahnen gibt es hier? Skizzieren Sie das Phasenbild. Welche periodische Bahn wirkt anziehend auf die Nachbarbahnen?

Hinweis: Setzen Sie die gesuchten Bahnkurven in Polarkoordinaten an in der Form $\gamma(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und schreiben Sie die durch F gegebene Differentialgleichung entsprechend um. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 4. April 2019, bis 12 Uhr im Mathematischen Institut.