Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 9. April 2019

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1. *(Variationsprobleme)* Stellen Sie zu den folgenden Funktionalen jeweils die Euler-Lagrange-Gleichung auf und bestimmen Sie die passende Lösungen:

(a) $I(\varphi) = \int_1^2 \exp(\varphi'(x))\,\sqrt{x}\,dx$ für $\varphi \in C^2([1,2])$ mit $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(2) = 1/2$.

(b) $I(\varphi) = \int_0^4 \frac{\ln(\varphi'(x))}{\sqrt{1+2x}}\,dx$ für $\varphi \in C^2([0,4])$ mit $\varphi(0) = -1$ und $\varphi(4) = 1$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Unendlich viele Extremalkurven)* Das Funktional I sei definiert durch

$$I(\varphi) = \int_0^1 (2\varphi(x)\varphi'(x)\cosh(x) + \varphi(x)^2\sinh(x))\,dx\,,$$

für $\varphi \in C^2([0,1])$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Zeigen Sie, dass es hier unendlich viele Lösungen der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung gibt. (2 Punkte)

Aufgabe 3. *(Variationsproblem)* (a) Seien a_0, a_1 Konstanten. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für $y(x)$ der Form $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ mit der Substitution $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$, in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt werden kann.

(b) Finden Sie jetzt diejenige Funktion $\varphi \in C^2([1,5])$ mit $\varphi(1) = 0$, $\varphi(5) = \frac{124}{25}$, für die das Integral

$$I(\varphi) = \int_1^5 (\frac{1}{2}\,x^2\,\varphi'(x)^2 + \varphi(x)^2)\,dx$$

den minimalen Wert annimmt. (5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Mehrdimensionales Problem)* Für jeden zweimal stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit Komponenten $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sei

$$I(\gamma) := \int_0^{\pi/2} (\dot{x}(t)^2 - \dot{y}(t)^2 + 2x(t)y(t) - 2x(t)^2)\,dt\,.$$

Stellen Sie die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen auf und bestimmen Sie deren Lösungen zu den Randbedingungen: $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. (5 Punkte)

Aufgabe 5. *(Vereinfachte Euler-Lagrange-Gleichung)* Sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig. Finden Sie diejenigen Funktionen $\varphi \in C^2([0,a])$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(a) = b$, für die das Integral $I(\varphi) = \int_0^a \frac{(\varphi'(x))^2}{1+(\varphi(x))^2}\,dx$ sein Minimum annimmt. Gibt es zu jeder Wahl von b eine passende Minimalkurve? (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 25. April 2019, bis 12 Uhr im Mathematischen Institut.