Übungen zur Vorlesung Differentialgleichungen — Dr. A. A'Campo-Neuen
Frühjahrssemester 2019 — 24. April 2019

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1. *(Kürzeste Wege im Raum)* Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ vorgegebene Punkte. Bezeichne Z die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Wege $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ von $p = \gamma(0)$ nach $q = \gamma(1)$, und sei $I(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||\, dt$ die Weglänge. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen dazu auf und zeigen Sie, dass der kürzeste Weg in Z der Geradlinige ist.
(4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Extrema unter Nebenbedingung)* Bestimmen Sie die lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$ auf der Einheitskugeloberfläche in $\mathbb{R}^3$, definiert durch $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$). (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Kettenlinie)* Die Form, die eine an zwei Punkten gleicher Höhe im Abstand $2a$ aufgehängte, homogene Kette vorgegebener Länge L annimmt, bezeichnet man als Kettenlinie. Die entsprechende Funktion $\varphi \in C^2[-a,a]$ mit $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ realisiert das Minimum von

$$I(\varphi) := \int_{-a}^{a} \varphi(x)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\, dx$$

unter der Nebenbedingung $N(\varphi) := \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\, dx = L$. Dabei sind $a > 0$ und $L > 2a$ vorgegeben. Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung (in der vereinfachten Form und mit Lagrange-Multiplikator) auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung. Gibt es zu den Randbedingungen und der Nebenbedingung immer eine eindeutige Lösung?
(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Laplaceoperator in Polarkoordinaten)* Sei $u = u(x,y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, definiert für $x^2+y^2 \leq 1$, und sei $U(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $0 < r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Rechnen Sie mithilfe der Kettenregel nach, dass dann für alle r, φ gilt:

$$(\Delta(u))(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 5. *(Laplaceoperator und Koordinatenwechsel)*

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $u(x,y) = 5x^2 - xy$. Bestimmen Sie die Funktion $v(x,y) = u(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$. Rechnen Sie nach, dass $\Delta v(x,y) = (\Delta u)(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$. Gilt das Entsprechende auch für den Differentialoperator $D = \partial_x - \partial_y$?

(b) Sei jetzt $u(x,y)$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen, $b \in \mathbb{R}^2$, A eine Dreh- oder Spiegelungsmatrix. Zeigen Sie:

$$\Delta((u(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b)) = (\Delta u)(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Abgabe: Donnerstag, den 2. Mai 2019, bis 12 Uhr im Mathematischen Institut.