1.4 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Unter einer *linearen* Differentialgleichung erster Ordnung versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

wobei die Koeffizienten $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in x sind. Ist $b(x) = 0$ für alle x, so heisst die Differentialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Ist die Gleichung homogen und die Funktion a integrierbar, so können wir die Lösungen durch Trennung der Variablen bestimmen. Für $y \neq 0$ erhalten wir aus $y' = \frac{dy}{dx} = a(x)\,y$

$$\ln(|y|) = \int \frac{dy}{y}\,dt = \int a(x)dx =: A(x) + \tilde{c}\,.$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$y = c\,e^{A(x)}\,,$$

wobei A eine Stammfunktion zu a bezeichnet und c eine beliebige Konstante ist. Die Lösung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig bestimmt und lautet:

$$y(x) = y_0\,\exp(A(x) - A(x_0)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Das Definitionsintervall jeder Lösung stimmt also mit dem Definitionsbereich der Funktion a überein. Für $y_0 = 0$ erhält man einen Ausschnitt der x-Achse als Lösungskurve. Für $y_0 > 0$ liegt die Lösungskurve ganz oberhalb und für $y_0 < 0$ ganz unterhalb der x-Achse.

1.4.1 Beispiel Schauen wir uns das Verhalten des Luftdrucks $p(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Meeresspiegel an. Die Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe hängt mit der Abnahme des Gewichtes der Luftsäule über einer Flächeneinheit zusammen. Genauer gilt

$$p'(h) = -\rho(h)\,,$$

wobei $\rho(h)$ das spezifische Gewicht der Luft in der Höhe h bezeichnet. Weiter gehen wir davon aus, dass die ideale Gasgleichung erfüllt ist. Das bedeutet, dass ρ proportional ist zum Verhältnis von Luftdruck p zu Temperatur T:

$$\rho(h) = c_1 \cdot \frac{p(h)}{T(h)}$$

für eine Konstante c_1. Für trockene Luft beträgt diese spezielle Gaskonstante $c_1 \approx 287[\frac{Pa\cdot m^3}{kg\cdot K}]$. Auch die Temperatur nimmt mit wachsender Höhe ab. Wir wollen annehmen, der Temperaturabfall sei proportional zur Höhe, also $T(h) = T_0 - c_2 h$, wobei T_0 die Temperatur auf Meereshöhe angibt und c_2 eine weitere Konstante ist. Genauer nehmen wir an $c_2 \approx 1/100[K/m]$. Dann erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$p'(h) = -c_1 \frac{p(h)}{T(h)} = \frac{-c_1}{T_0 - c_2 h}\,p(h)\,.$$

Es handelt sich also um eine homogene lineare Differentialgleichung, wobei hier die Koeffizientenfunktion lautet:

$$a(h) = \frac{-c_1}{T_0 - c_2 h} \quad \text{für } h \in [0, \frac{T_0}{c_2}) .$$

Um die Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen, müssen wir zunächst eine Stammfunktion A für die Funktion a finden. Dazu verwenden wir die Substitution $T = T_0 - c_2 h$ und erhalten für $0 \le h < \frac{T_0}{c_2}$:

$$A(h) = \int_0^h a(h)dh = \int_0^h \frac{-c_1 dh}{T_0 - c_2 h} = \frac{c_1}{c_2} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \frac{c_1}{c_2} \ln(\frac{T}{T_0}) = \frac{c_1}{c_2} \ln(1 - \frac{c_2 h}{T_0}) .$$

Wenn also der Luftdruck auf Meereshöhe $p(0) = p_0$ beträgt, dann gilt:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{A(h)} = p_0 (1 - \frac{c_2 h}{T_0})^{\frac{c_1}{c_2}} \quad \text{für } 0 \le h < T_0/c_2 \approx 100 T_0 .$$

Die Funktion p ist monoton fallend und konvex, weil $\frac{c_1}{c_2} \approx 3 \cdot 10^4$ ist. Wenn wir annehmen, dass $T_0 = 273[K]$ (also gleich Null Grad Celsius) ist, dann ist der Druck bei einer Höhe von etwa $27[km]$ auf Null gefallen.

Betrachten wir nun den inhomogenen Fall. Eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung kann man mithilfe der Methode der *Variation der Konstanten* finden. Dies Verfahren besteht aus den folgenden drei Schritten:

- die allgemeine Lösung $y = c\, e^{A(x)}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aufstellen,
- durch den Ansatz $y = C(x) e^{A(x)}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung finden,
- die Integrationskonstante so anpassen, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

1.4.2 Beispiel Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{3}{x} y + x^3 e^x - 2x, \quad y(1) = 1 .$$

Im ersten Schritt lösen wir die dazugehörige homogene Gleichung $y' = \frac{3}{x} y$. Dazu müssen wir eine Stammfunktion der Funktion $a(x) = \frac{3}{x}$ bestimmen. Wir wählen

$$A(x) = \int_1^x \frac{3}{x}\, dx = 3 \ln(x) = \ln(x^3) .$$

Also lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y(x) = c\, e^{A(x)} = c \cdot x^3 .$$

Im zweiten Schritt machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten $y(x) = c(x) \cdot x^3$ und setzen in die inhomogene Gleichung ein. Wir erhalten:

$$y'(x) = c'(x) \cdot x^3 + 3c(x)x^2 = \frac{3}{x}\, c(x)x^3 + x^3 e^x - 2x\,.$$

Es folgt

$$c'(x) = e^x - \frac{2}{x^2}\,.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$y(x) = c(x)x^3 = (e^x + \frac{2}{x} + c_1)x^3 \quad \text{für eine Konstante } c_1.$$

Im dritten Schritt wird die Konstante c_1 durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$y(1) = (e + 2 + c_1) = 1\,.$$

Also ist $c_1 = -e - 1$, und die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$\varphi(x) = (e^x - e - 1)x^3 + 2x^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

Das Verfahren funktioniert immer. Es gilt nämlich folgendes.

1.4.3 Satz *Das Anfangswertproblem*

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0\,,$$

wobei $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ sind, hat auf I eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $\varphi(x) = (C(x) + y_0)\, e^{A(x)}$,

$$\text{wobei} \quad A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)ds \quad \text{und} \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds\,.$$

Beweis. Durch Einsetzen kann man überprüfen, dass die durch die Formel angegebene Funktion φ eine Lösung beschreibt. Nehmen wir jetzt an, die Funktion $\varphi_1\colon I \to \mathbb{R}$ sei ebenfalls eine Lösung desselben Anfangswertproblems. Dann gilt für die Differenz $\psi := \varphi - \varphi_1$ folgendes:

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - \varphi_1'(x) = a(x)(\varphi(x) - \varphi_1(x)) = a(x)\psi(x)\,.$$

Also ist ψ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = a(x) \cdot y$, und zwar zur Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$. Nach dem eben Gesagten, ist deshalb $\psi(x) = 0$ für alle x, und das bedeutet, die beiden Lösungen φ und φ_1 stimmen miteinander überein. q.e.d.

Hier nochmals ein Beispiel.

1.4.4 Beispiel Betrachten wir das Anfangsproblem

$$y' = \frac{dy}{dx} = x - y\,, \quad y(1) = 2\,.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y' = -y$. Hier ist also

$$a(x) = -1\,, \quad x_0 = 1\,, \quad y_0 = 2\,, \quad b(x) = x\,.$$

Wir erhalten

$$A(x) = \int_1^x (-1)\,dx = -x + 1 \quad \text{und} \quad C(x) = \int_1^x s\,e^{s-1}\,ds = (x-1)\,e^{x-1}\,.$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$\varphi(x) = ((x-1)\,e^{x-1} + 2)\,e^{1-x} = (x-1) + 2e^{1-x}\,.$$

1.5 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung* hat die Form

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

wobei $a_1, a_0, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind, die nur von x abhängen. Entsprechend definiert man lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Ist $b(x) = 0$ für alle x, so spricht man von einer *homogenen* Differentialgleichung, andernfalls heisst die Gleichung *inhomogen*. Gleichungen dieses Typs sind uns bereits begegnet, hier nochmals die entsprechenden Beispiele:

- Die Schwingungsgleichung der ungedämpften Schwingung lautet

  $$y'' + \lambda^2 y = 0 \quad (\lambda \neq 0 \text{ konstant.})$$

  Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, und die Lösungen lauten

  $$y(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,,$$

  wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählte Konstanten sind.

- Die Lösungen der homogenen Gleichung

  $$y'' - \lambda^2 y = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

  lauten

  $$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}..$$

  Hier sind wiederum $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählte Konstanten.

In diesen Beispielen enthält die allgemeine Lösung jeweils zwei frei wählbare Konstanten. Diese Konstanten können durch geeignete Anfangsbedingungen festgelegt werden. Dies ist kein Zufall, sondern ein allgemeines Prinzip. Man kann aus dem schon erwähnten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für "gutartige" Differentialgleichungen erster Ordnung die folgende wichtige Aussage herleiten (allerdings werden wir hier auf die Herleitung verzichten):

1.5.1 Satz *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_1, a_0, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Seien weiter $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Die Differentialgleichung*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

hat genau eine Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, die folgende Anfangsbedingungen erfüllt

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_1 \,.$$

Hier zunächst einige Beobachtungen zur Menge der Lösungen einer linearen Differentialgleichung:

1.5.2 Satz

1. *Für die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung gilt das Superpositionsprinzip, das heisst, sind $\varphi_1, \varphi_2\colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung, so auch jede Linearkombination $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Konstanten). Das heisst, die Lösungen bilden einen linearen Unterraum im Vektorraum aller Funktionen auf I.*

2. *Sind φ_1, φ_2 Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung, so ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.*

Beweis. Wir können diese Behauptungen direkt nachrechnen. q.e.d.

1.5.3 Definition Ein Paar von Lösungen (φ_1, φ_2) einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird als *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung bezeichnet, wenn sich jede andere Lösung als Linearkombination von φ_1 und φ_2 schreiben lässt. Man spricht auch von einem System von *Fundamentallösungen.* Dabei handelt es sich eigentlich um eine Basis des Lösungsraums.

Wir können die Lösungsmengen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgendermassen beschreiben:

1.5.4 Satz

1. *Jede homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Das heisst, der Lösungsraum ist zweidimensional.*

2. *Ist φ_p eine spezielle Lösung einer auf dem Intervall I definierten inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

und ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,,$$

so lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \varphi_p(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstant}, x \in I).$$

1.5.5 Beispiel Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' = 6 \quad (x > 0)$$

lautet

$$y(x) = x^2 + c_1 \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cdot 1 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x > 0)\,.$$

Hier ist also $\varphi_p(x) = x^2$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi_2(x) = 1$.

Beweis des Satzes. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der ersten mit Satz 1.5.2. Es reicht also, die erste Behauptung zu beweisen. Dazu konstruieren wir ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung mithilfe des Satzes über die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertprobleme. Und zwar wählen wir einen Punkt x_0 im Definitionsbereich I der Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung aus. Seien φ_1 und φ_2 die Lösungen der Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(x_0) = 1, \quad \varphi_1'(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x_0) = 0, \quad \varphi_2'(x_0) = 1\,.$$

Die Existenz dieser Lösungen wird durch den Satz über die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertprobleme garantiert.

Ist jetzt φ irgendeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, so können wir φ als Linearkombination von φ_1 und φ_2 schreiben. Denn setzen wir $c_1 := \varphi(x_0)$ und $c_2 := \varphi'(x_0)$, so ist die Funktion $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung, die dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie φ. Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmt diese Linearkombination also bereits mit φ überein. q.e.d.

Die folgende Beobachtung wird sich als nützlich erweisen, wenn es darum geht, die Idee der Variation der Konstanten auf inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu übertragen.

1.5.6 Lemma *Zwei Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \colon I \to \mathbb{R}$ einer homogenen linearen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die daraus gebildete Wronski-Determinante nirgends verschwindet:*

$$W(x) := \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} := \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Die Lösungen φ_1 und φ_2 bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn zu jedem $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\varphi(x) := \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$ die entsprechenden Anfangsbedingungen erfüllt, das heisst:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \varphi(x_0) & = & \alpha\varphi_1(x_0) & + & \beta\varphi_2(x_0) & = & y_0 \\ \varphi'(x_0) & = & \alpha\varphi_1'(x_0) & + & \beta\varphi_2'(x_0) & = & y_1 \end{array}$$

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem in den Variablen α, β mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{pmatrix}$ zu jeder Vorgabe von y_0, y_1 lösbar ist. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass die Matrix A von Rang 2 ist oder anders gesagt, dass $\det A = W(x_0) \neq 0$. q.e.d.

1.5.7 Beispiel $\quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0 \quad (x \neq 0)\,.$

Die Funktionen $\varphi_1(x) = x^2$ und $\varphi_2(x) = x^{-2}$ erfüllen diese Differentialgleichung und bilden ein Fundamentalsystem und die entsprechende Wronskideterminante lautet hier:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{x}\,.$$

Also ist $W(x) \neq 0$ für alle zugelassenen x-Werte.

Für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung gibt es keine allgemeinen Lösungsformeln. Aber wenn die Koeffizientenfunktionen a_1 und a_0 konstant sind, also von x nicht explizit abhängen, dann kann man konkrete Fundamentalsysteme angeben. Das wollen wir jetzt tun. Wir betrachten also eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung *mit konstanten Koeffizienten*:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ konstant.})$$

Wie die zwei Ausgangsbeispiele zeigen, können die Lösungen solcher Gleichungen sehr verschieden aussehen. Eine einheitliche Beschreibung der Lösungsmengen erhält man, wenn man zu komplexwertigen Funktionen übergeht. Bereits im ersten Semester haben wir folgendes festgehalten (siehe Mathe. Methoden I, Komplexe Zahlen):

1.5.8 Bemerkung *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ festgewählt. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems für die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir jetzt den komplexen Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist.}$$

Es gilt $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Exponentialfunktion niemals den Wert 0 annimmt, folgt

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn λ eine Nullstelle des sogenannten *charakteristischen Polynoms*

$$p(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

der Differentialgleichung ist. Daraus ergibt sich folgende Übersicht:

1.5.9 Satz
1. *Hat das charakteristische Polynom der Differentialgleichung zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1, λ_2, so bilden die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ $(x \in \mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem der Gleichung.*

2. *Hat das charakteristische Polynom der Differentialgleichung eine doppelte reelle Nullstelle λ_1, das heisst, ist $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^2$, dann bilden die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ $(x \in \mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem der Gleichung.*

3. *Hat das charakteristische Polynom zwei zueinander komplex konjugierte Nullstellen $\alpha \pm i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0)$, dann führt der Ansatz auf die komplexen Lösungen $z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$ und $z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$ (für $x \in \mathbb{R}$). Reellwertige Lösungen erhalten wir, indem wir jeweils zum Real- bzw. zum Imaginärteil übergehen:*

$$y_1(x) = \mathrm{Re}(z_1(x)) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{und}$$

$$y_2(x) = \mathrm{Im}(z_1(x)) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Wir halten fest, dass in jedem Fall ein Fundamentalsystem existiert, dessen Wronski-Determinante in keinem Punkt verschwindet.

Beweis. Zu 2.: Überprüfen wir zunächst, dass y_2 tatsächlich die Differentialgleichung löst:

$$y_2'(x) = (\lambda_1 x + 1)e^{\lambda_1 x} \qquad y_2''(x) = (\lambda_1^2 x + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 x}\,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_0 = (\lambda_1^2 x + 2\lambda_1 + a_1\lambda_1 x + a_1 + a_0 x)e^{\lambda_1 x} = (p(\lambda_1)x + p'(\lambda_1))e^{\lambda_1 x} = 0\,.$$

Die Wronski-Determinante ist an jeder Stelle x ungleich Null, denn $W(x) = e^{2\lambda_1 x}$.
q.e.d.

Hier nun einige konkrete Anwendungsbeispiele.

1.5.10 Beispiel Wir suchen eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 1, y'(1) = 0\,.$$

Das charakteristische Polynom lautet hier: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}$. Dies Polynom hat eine doppelte Nullstelle bei $-\frac{1}{2}$. Also bilden $y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ und $y_2(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ ein Fundamentalsystem. Die Anfangsbedingungen für $y(x) = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2xe^{-\frac{x}{2}}$ sind genau dann erfüllt, wenn $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$, und die gesuchte Lösung ist $y(x) = \frac{1}{2}(1+x)e^{(1-x)/2}$.

1.5.11 Beispiel Lösen wir folgendes Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 1, y'(0) = -1\,.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ hat die komplex konjugierten Nullstellen $-1 \pm 2i$. Hier ist also $\alpha = -1$ und $\beta = 2$. Die Funktionen

$$y_1(x) = e^{-x}\cos(2x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$$

bilden daher ein Fundamentalsystem. Die Anfangsbedingungen für $y(x) = (c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))e^{-x}$ führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= c_1 \\ y'(0) = -1 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

Also lautet die gesuchte Funktion $y(x) = e^{-x}\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$. Durch diese Funktion wird eine gedämpfte Schwingung beschrieben, die Amplitude nimmt exponentiell mit x ab.

1.5.12 Beispiel Das Verhalten einer schwingenden Feder bei Berücksichtigung der Reibung ist beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$y'' = -2\alpha y' - \omega^2 y\,,$$

wobei $\alpha > 0$ ein Mass für die Reibung ist und $\omega > 0$ die Elastizität der Feder angibt. Das charakteristische Polynom der Gleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2$$

und hat die Nullstellen $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Stellen wir zusätzlich die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = -\alpha y_0$, dann gibt es folgende drei Möglichkeiten, je nach Verhältnis von Reibung zu Elastizität:

- Ist $0 < \alpha < \omega$, dann liegt eine gedämpfte Schwingung vor, und zwar ist
$$y(x) = y_0e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,, \qquad \text{wobei } \beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$
- Ist $\alpha = \omega$, handelt es sich um den aperiodischen Grenzfall, nämlich
$$y(x) = y_0e^{-\alpha x} \quad \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,.$$
- Ist $\alpha > \omega$, ist die Reibung so stark, dass eine Schwingung verhindert wird. In diesem Fall ist
$$\begin{aligned} y(x) &= y_0e^{-\alpha x}\cosh(\beta x)\,, \qquad \text{wobei } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha. \\ &= y_0(e^{(-\alpha+\beta)x} + e^{(-\alpha-\beta)x})/2 \quad \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Schauen wir uns zu guter Letzt noch den inhomogenen Fall an. Eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

wobei $a_1, a_0, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist nach Satz 1.5.4 von der Form

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{für } x \in I\,,$$

wobei c_1, c_2 Konstanten, $y_p(x)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf I und $\{y_1(x), y_2(x)\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Wie man ein Fundamentalsystem findet, wurde schon erklärt. Jetzt bleibt noch zu ergänzen, wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden kann. In vielen konkreten Fällen führt (bei einiger Erfahrung) geschicktes Raten am schnellsten zum Ziel. Aber es gibt auch eine Methode, die ohne Raten funktioniert. Diese Methode beruht auf der Variation der Konstanten, die wir schon bei der Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung eingesetzt hatten.

Dazu nehmen wir an, $\{y_1(x), y_2(x)\}$ sei ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, und machen den Ansatz

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\,.$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, lassen wir jetzt die Angabe der Zeiten x weg. Dann ist nach Produktregel

$$y' = u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2'$$

und die zweite Ableitung lautet:

$$y'' = (u_1'y_1 + u_2'y_2)' + u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''\,.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert, wenn wir ein wenig umsortieren:

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_0y = {} & (u_1'y_1 + u_2'y_2)' + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1'y_1' + u_2'y_2') \\ & + u_1(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + u_2(y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) = b\,. \end{aligned}$$

Weil y_1 und y_2 Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung sind, fallen die Ausdrücke in den letzten beiden Klammern weg, und es bleibt die folgende Bedingung an die Ableitungen von u_1 und u_2:

$$(u_1'y_1 + u_2'y_2)' + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1'y_1' + u_2'y_2') = b\,.$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn an jeder Stelle x folgende zwei Gleichungen simultan gelten:

$$y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) \;=\; 0$$

$$y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) \quad = \quad b(x)$$

Die Determinante der Koeffizienten dieses linearen Gleichungssystems für die Unbekannten $u_1'(x)$ und $u_2'(x)$ stimmt gerade mit der Wronski-Determinante $W(x)$ überein, und wie oben bemerkt, können wir davon ausgehen, dass $W(x) \neq 0$ für alle x. Deshalb ist das Gleichungssystem für alle x eindeutig lösbar, und zwar ist:

$$u_1'(x) = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \text{und} \quad u_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)}\,.$$

Durch Integration erhalten wir daraus eine spezielle Lösung:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{b(x)y_2(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)}dx \quad (x \in I)\,.$$

Hier sind zwei Beispiele inhomogener Differentialgleichungen, an denen das Verfahren getestet werden soll:

1.5.13 Beispiel

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}\,, \quad x \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ mit den Nullstellen $\pm i$. Als Fundamentalsystem wählen wir $y_1(x) = \cos(x)$ und $y_2(x) = \sin(x)$. Dann ist $W(x) = 1$ für alle x.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung ist hier $b(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Die Variation der Konstanten führt auf:

$$u_1'(x) = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und}$$

$$u_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = 1\,.$$

Durch Integration wird daraus bei passender Wahl der Integrationskonstanten: $u_1(x) = \ln(\cos(x))$ und $u_2(x) = x$. Die entsprechende spezielle Lösung lautet:

$$y_p(x) = \cos(x) \cdot \ln(\cos(x)) + x \cdot \sin(x) \quad \text{für } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}\,.$$

1.5.14 Beispiel Sei jetzt $\lambda > 0$ eine vorgegebene Frequenz. Die Gleichung

$$y'' + \lambda^2 y = \cos(\lambda x)\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine freie Schwingung (ohne Reibung), angeregt durch eine Cosinusschwingung derselben Frequenz. Eine spezielle Lösung lautet hier

$$y_p(x) = \frac{1}{2\lambda} x \sin(\lambda x)\,.$$

Das ist eine Schwingung, deren Amplitude linear mit x wächst. Für $x \to \infty$, geht auch die Amplitude gegen unendlich. Das erklärt das Phänomen der Resonanzkatastrophen.

Man findet diese spezielle Lösung am einfachsten, wenn man das beschriebene Verfahren der Variation der Konstanten hier im Komplexen durchführt. Wir wissen schon, dass die Funktionen $z_1(x) = e^{i\lambda x}$ und $z_2(x) = e^{-i\lambda x}$ komplexe Fundamentallösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sind. Die Wronski-Determinante dazu ist $W(x) = -2i\lambda$ für alle x. Die Inhomogenität ist hier $b(x) = \cos(\lambda x) = \frac{1}{2}(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x})$. Der Variationsansatz führt deshalb auf

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -\frac{b(x)z_2(x)}{W(x)} = \frac{1}{4i\lambda}(1 + e^{-2i\lambda x}) \quad \text{und} \\ u_2'(x) &= \frac{b(x)z_1(x)}{W(x)} = \frac{-1}{4i\lambda}(e^{2i\lambda x} + 1)\,. \end{aligned}$$

Durch Integration und Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz erhalten wir bei passender Wahl der Integrationskonstanten die angegebene spezielle Lösung.

Kehren wir nochmal zurück zu Beispiel 1.5.5. Hier wurde bemerkt, dass die Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x}\,y' = 6 \quad (x > 0)$$

die spezielle Lösung $\varphi_p(x) = x^2$ hat, ohne jedoch zu erklären, wie man diese Lösung finden kann. Wählen wir hier das Fundamentalsystem $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$ und $\varphi_2(x) = 1$, so lautet die entsprechende Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Setzt man nun in die obengenannte Lösungsformel ein, erhält man zur entsprechenden Anfangsbedingung:

$$\varphi_p(x) = -\varphi_1(x)\int_0^x \frac{b(x)\varphi_2(x)}{W(x)}\,dx + \varphi_2(x)\int_0^x \frac{b(x)\varphi_1(x)}{W(x)}\,dx =$$

$$-\frac{1}{x}\int_0^x 6x^2\,dx + \int_0^x 6\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2\,dx = x^2\,,$$

wie behauptet.