Kapitel 2
Lineare Algebra II

2.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Die mit der Vektorraumstruktur verträglichen Abbildungen zwischen Vektorräumen werden als *linear* bezeichnet. Genauer definiert man:

2.1.1 Definition Eine Abbildung $L: V \to W$ zwischen zwei reellen Vektorräumen V und W heisst *linear*, wenn für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, folgendes gilt:

1. $L(v + w) = L(v) + L(w)$.
2. $L(\lambda v) = \lambda L(v)$.

2.1.2 Bemerkung *Für jede lineare Abbildung $L: V \to W$ gilt $L(0) = 0$, das heisst L bildet den Nullvektor aus V auf den Nullvektor aus W ab.*

Beweis. Denn sei $v \in V$ gewählt. Dann folgt aus der zweiten Bedingung $L(0) = L(0 \cdot v) = 0 \cdot L(v) = 0$. q.e.d.

2.1.3 Beispiele (a) Sämtliche Drehungen des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um einen beliebigen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ sind linear, sie sind sogar längentreu und bilden Dreiecke auf kongruente Dreiecke ab. Entsprechend ist jede räumliche Drehung um eine Achse durch den Nullpunkt eine lineare Selbstabbildung von $\mathbb{R}^3$.

(b) Jede Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an einer Gerade durch den Nullpunkt ist linear. Aber die Spiegelungen, deren Spiegelachsen nicht durch den Nullpunkt gehen, sind nicht linear, weil sie den Nullpunkt nicht festlassen.

(c) Die Projektion $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ist linear, wie man direkt nachrechnet. Auch jede andere orthogonale Projektion des Raumes auf eine Ebene, wie sie verwendet werden, um Grundrisse, Aufrisse, Seitenansichten von Gebäuden zu zeichnen, sind linear.

(d) Ein Zoom, also eine Streckung der Einheiten um einen bestimmten Vergrrosserungsfaktor ist linear. Dasselbe gilt für die Reskalierung von Koordinaten mit unterschiedlichen Faktoren, also im zweidimensionalen zum Beispiel in x-Richtung um Faktor 2 und in y-Richtung um Faktor 3.

(e) Der Ableitungsoperator $D: C^1[a, b] \to C^0[a, b]$, der einer stetig differenzierbaren Funktion f auf $[a, b]$ jeweils ihre Ableitung f' zuordnet, ist linear.

(f) Auch der Integraloperator $I\colon C^0[a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ für $f \in C^0[a,b]$, ist linear, weil Integration mit Summenbildung und Skalarmultiplikation vertauschbar ist.

Drehungen, Spiegelungen und senkrechte Projektionen haben die Eigenschaft, sämtliche affinen Geraden wieder auf affine Geraden oder Punkte abzubilden. Weil dies auch für jede beliebige lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gilt, nennt man diese Abbildungen "linear". Lineare Abbildungen lassen sich durch Matrizen beschreiben. Hier ein erstes Beispiel.

2.1.4 Beispiel Die folgende Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch die Multiplikation von ebenen Vektoren mit einer festgewählten 3×2-Matrix A:

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+y \\ 3x-2y \end{pmatrix} .$$

Man kann leicht nachrechnen, dass diese Abbildung linear ist. Ausserdem ist

$$L(e_1) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L(e_2) = L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Wir stellen also fest, dass die Bilder der kanonischen Basisvektoren e_1 und e_2 mit den beiden Spalten der Matrix A übereinstimmen.

Allgemeiner gilt folgendes:

2.1.5 Satz *Jede Matrix A vom Typ $m \times n$ definiert eine lineare Abbildung durch Multiplikation*

$$L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m , \quad v \mapsto A \cdot v .$$

Umgekehrt gibt es zu jeder linearen Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $m \times n$-Matrix A mit $L = L_A$. An den Spalten von A können wir die Bilder der kanonischen Basisvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$ unter L ablesen.

Beweis. Man kann direkt nachrechnen, dass die Multiplikation von Spaltenvektoren mit einer festen Matrix eine lineare Abbildung liefert.

Sei jetzt umgekehrt eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vorgegeben. Um die entsprechende Matrix zu finden, schreiben wir zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^m$ auf:

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, L(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Aus diesen n Spaltenvektoren bilden wir eine Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix leistet das Gewünschte, denn es gilt:

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = L(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1L(e_1) + \cdots + x_nL(e_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. q.e.d.

2.1.6 Folgerung *Eine lineare Abbildung L von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist durch ihre Wirkung auf die kanonischen Basisvektoren bereits eindeutig festgelegt. Zu jeder Wahl von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ gibt es auch eine lineare Abbildung, die jeweils e_j auf v_j abbildet.*

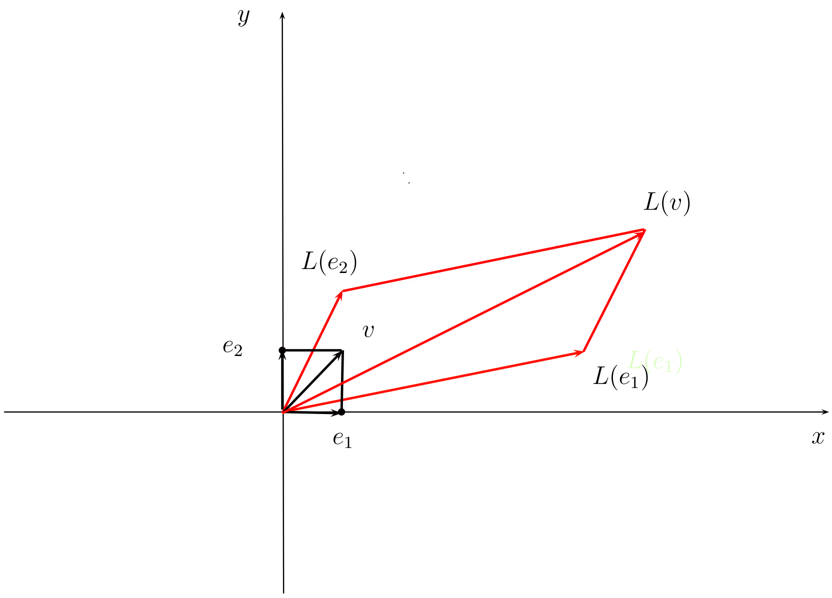
2.1.7 Beispiele (a) Die Matrix zur Drehung D_α des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α lautet: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Das bedeutet, ist $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so ist

$$D_\alpha(v) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x–Achse den Winkel α bildet, wird beschrieben durch Multiplikation mit dieser Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

(c) Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(e_1) = 5e_1 + e_2$ und $L(e_2) = e_1 + 2e_2$ ist gegeben durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sie hat folgende Wirkung auf das markierte Einheitsquadrat:



(d) Die Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ wird durch die folgende Matrix induziert:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.1.8 Bemerkung *Setzt man zwei lineare Abbildungen $L_2\colon V \to U$ und $L_1\colon U \to W$ zusammen, erhält man wieder eine lineare Abbildung, nämlich*

$$L_1 \circ L_2\colon V \to W\,, \quad u \mapsto L_1(L_2(u))\,.$$

Sind die beiden linearen Abbildungen durch Multiplikation mit Matrizen A vom Typ $m \times s$ und B vom Typ $s \times n$ gegeben, wie in Satz 2.1.5 beschrieben, so gilt

$$L_A(L_B(v)) = A(Bv) = (AB)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\,.$$

Das heisst, die Zusammensetzung der linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation der entsprechenden Matrizen.

2.1.9 Beispiel Schauen wir uns an, welchen Effekt es hat, wenn wir die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ zunächst um den Winkel $-\alpha$ drehen, dann an der x-Achse spiegeln und schliesslich um den Winkel α zurückdrehen. Das Produkt der entsprechenden Matrizen lautet:

$$C := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} .$$

Die zusammengesetzte Abbildung ist also eine Spiegelung an derjenigen Geraden, die mit der x-Achse den Winkel α bildet (siehe Beispiel 2.1.7).

2.1.10 Bemerkung *Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so ist die lineare Abbildung L_A umkehrbar und es gilt*

$$(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}\,.$$

Die Abbildung A ist genau dann volumentreu, wenn $|\det(A)| = 1$.

Betrachten wir jetzt allgemeiner lineare Abbildungen zwischen abstrakten endlichdimensionalen Vektorräumen. Halten wir zunächst folgende Verallgemeinerung von Folgerung 2.1.6 fest.

2.1.11 Satz *Seien V, W Vektorräume und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Jede lineare Abbildung L von V nach W ist durch ihre Wirkung auf $v_1, \dots, v_n$ bereits eindeutig festgelegt. Umgekehrt gibt es zu jeder Wahl von n Vektoren $\tilde{v_1}, \dots, \tilde{v_n} \in W$ eine lineare Abbildung $L\colon V \to W$ mit $L(v_j) = \tilde{v_j}$ für alle j.*

Beweis. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der Form $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ schreiben. Ist $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt
$$L(v) = x_1L(v_1) + \cdots + x_nL(v_n)\,.$$

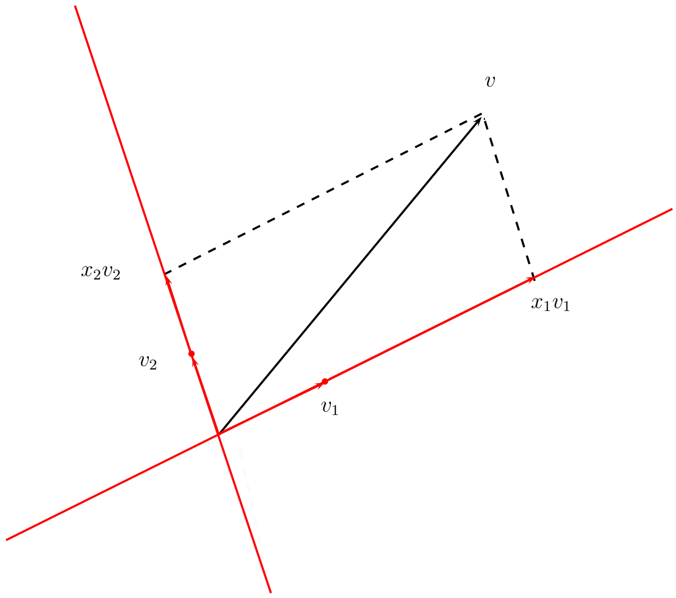
Also ist $L(v)$ durch die Koordinaten x_j von v und durch die Bildvektoren $L(v_j)$ bereits eindeutig bestimmt.

Sind umgekehrt n Vektoren $\tilde{v_1}, \ldots, \tilde{v_n} \in W$ ausgewählt, so wird durch die Vorschrift

$$L(v) := x_1\tilde{v_1} + \cdots + x_n\tilde{v_n}$$

eine lineare Abbildung $L\colon V \to W$ festgelegt. q.e.d.

Jetzt wollen wir eine solche Abbildung $L\colon V \to W$ wiederum als Multiplikation mit einer Matrix beschreiben. Dazu müssen wir aber zunächst Basen und damit Koordinatensysteme für beide Vektorräume V und W wählen. Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ eine Linearkombination, dann sind die die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sind die Koordinaten von v bezogen auf die Basis $\mathcal{A}$.



Den Spaltenvektor, gebildet aus den x_j, bezeichnen wir als den Koeffizientenvektor von v bezüglich der Basis $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise erhalten wir eine bijektive lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}^n$, nämlich

$$V \to \mathbb{R}^n; \quad v \mapsto \mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(v) .$$

Entsprechend liefert die Wahl einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W die bijektive lineare Abbildung

$$W \to \mathbb{R}^m; \quad w \mapsto \mathrm{Koeff}_{\mathcal{B}}(w) .$$

Setzen wir diese Identifikationen mit der linearen Abbildung L zusammen, erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\tilde{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(v) \mapsto v \mapsto L(v) \mapsto \mathrm{Koeff}_{\mathcal{B}}(L(v)) .$$

Wir wissen bereits, dass diese Abbildung durch Multiplikation mit einer Matrix A gegeben ist, wobei in den Spalten die Koeffizienten der Bilder $L(v_j)$, ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$ stehen. Wir schreiben dafür

$$_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}} = A\,.$$

Damit haben wir folgendes Resultat gefunden:

2.1.12 SATZ *Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, W ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Schreibt man die n Bildvektoren $L(v_j)$ in Koordinaten bezogen auf die Basis $\mathcal{B}$, und bildet aus den Koeffizientenvektoren als Spalten eine $m \times n$-Matrix A, so gilt*

$$\mathrm{Koeff}_{\mathcal{B}}(L(v)) = A \cdot \mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(v)\,.$$

Ist $V = W$, verwendet man üblicherweise dieselbe Basis für Ausgangs- und Bildraum.

2.1.13 BEISPIEL Sei V die Ebene durch 0, erzeugt von zwei linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2 in $\mathbb{R}^3$. Die Abbildung $L\colon V \to V$ sei festgelegt durch $L(v_1) = 2v_1$ und $L(v_2) = v_1 + v_2$. Dann wählen wir als Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ und lesen ab $\mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(L(v_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{Koeff}_{\mathcal{A}}(L(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also wird L bezogen auf die Basis $\mathcal{A}$ hier durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

WICHTIGE SPEZIALFÄLLE:

- Sind $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die kanonischen Basen, erhalten wir die in Satz 2.1.5 gegebene Beschreibung wieder zurück.
- Ist $V = W$, wählt man üblicherweise $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Die linearen Selbstabbildungen werden auch als *Endomorphismen* bezeichnet und entsprechen quadratischen Matrizen.

2.1.14 BEISPIELE (a) Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und L die ebene Spiegelung an der Geraden g durch den Nullpunkt. Dann wählen wir als Basis einen Vektor $v_1 \neq 0$ auf der Geraden g und einen dazu senkrechten Vektor $v_2 \neq 0$. Offenbar ist $L(v_1) = v_1$ und $L(v_2) = -v_2$. Also wird im dazugehörigen Koordinatensystem die Spiegelung beschrieben durch die Matrix $_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $V = W = \mathbb{R}^3$ und L eine Drehung um die Achse g durch den Nullpunkt und um den Winkel α. Wir wählen für V eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, so dass v_1 in Richtung der Drehachse g zeigt, v_2, v_3 in der zu g senkrechten Ebene einen Winkel von 90 Grad bilden und beide dieselbe Länge haben. Bezogen auf dieses Koordinatensystem lautet die Matrix von L:

$$_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,.$$

(c) Sei V der Raum der Polynome von Höchstgrad 3 mit der Basis $\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3)$ und W der Raum der Polynome von Höchstgrad 2 mit Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Die lineare Abbildung $L: V \to W$ sei definiert durch die Ableitung $L(p) := p'$ für $p \in V$. Offenbar ist dann $L(1) = 0$, $L(x) = 1$, $L(x^2) = 2x$, $L(x^3) = 3x^2$. Daraus können wir die Matrix von L ablesen. Sie lautet:

$$ {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . $$

(d) Seien V, W wie in (c), ausgestattet mit denselben Basen. Betrachten wir jetzt die lineare Abbildung $L: W \to V$, gegeben durch $L(p(x)) = (2x - 1)p(x)$ für alle Polynome p in W. Wir berechnen

$$ (2x - 1)(a_2x^2 + a_1x + a_0)(2x - 1) = (2a_2)x^3 + (2a_1 - a_2)x^2 + (2a_0 - a_1)x - a_0 . $$

Nun können wir die entsprechende Matrix ablesen:

$$ {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . $$

(e) Sei $\lambda > 0$ vorgegeben und bezeichne V den Lösungsraum der Differentialgleichung $y'' = -\lambda^2 y$. Durch Ableiten wird eine lineare Abbildung $L: V \to V$ definiert. Als Basis $\mathcal{A}$ von V wählen wir das Fundamentalsystem, gebildet aus $f(x) = \cos(\lambda x)$ und $g(x) = \sin(\lambda x)$. Dann ist $L(f) = f' = -\lambda g$ und $L(g) = g' = \lambda f$. Also lautet hier die entsprechende Matrix:

$$ {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} . $$