5.2 Riemannintegral in mehreren Variablen

Die Idee, die dem Riemannschen Integralbegriff (für Funktionen in einer Variablen) zugrundeliegt, ist die Approximation einer krummlinig begrenzten Fläche mithilfe geeigneter Rechtecksummen. Diese Idee kann man auch auf reellwertige Funktionen in zwei (oder noch mehr) Variablen übertragen, und so Volumina von Körpern berechnen, die von einer gewölbten Fläche berandet werden, indem man sie durch geeignete Quadersummen approximiert.

Hier zunächst einige Vorbereitungen: Unter einem *Quader* in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir ein Produkt von n abgeschlossenen Intervallen der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j\},$$

wobei $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ sind. Für $n = 1$ handelt es sich um abgeschlossene Intervalle, für $n = 2$ um Rechtecke und für $n = 3$ um Quader im gewöhnlichen Sinn. Das n-dimensionale Volumen des Quaders definieren wir als

$$\mathrm{Vol}_n(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Für $n = 1$ gibt diese Grösse die Länge des Intervalls, für $n = 2$ den Flächeninhalt des Rechtecks und für $n = 3$ den Rauminhalt des Quaders an. Der Durchmesser ist folgendermassen definiert

$$\mathrm{diam}(Q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2}.$$

Nach Pythagoras gibt dieser Wert für $n = 2$ die Länge der Diagonale des Rechtecks und für $n = 3$ die Länge der Raumdiagonale des Quaders an.

Unter einer *Zerlegung* Z eines Quaders Q verstehen wir eine Wahl von Teilquadern $Q_1, \ldots, Q_m$, die Q überdecken, ohne sich zu überlappen. Das heisst, es soll gelten

$$Q = \cup_{k=1}^{m} Q_k \quad \text{und} \quad Q_k \cap Q_l = \partial Q_k \cap \partial Q_l \quad \text{für alle } k, l.$$

Im eindimensionalen Fall sind die Zerlegungen gerade die Teilungen eines abgeschlossenen Intervalls in Teilintervalle. Im zweidimensionalen Fall geht es um die Zerlegung eines Rechtecks in Teilrechtecke. Dabei kann man entweder ein gemeinsames Raster für die Unterteilung in x und y-Richtung wählen, oder man wählt individuelle Teilrechtecke aus, die insgesamt das gesamte Rechteck pflastern. Als Mass für die Feinheit der Zerlegung verwenden wir den maximalen Durchmesser der Teilquader:

$$||Z|| := \max_k \mathrm{diam}(Q_k).$$

Sei jetzt $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, reellwertige Funktion auf einem Quader Q und sei Z eine Zerlegung von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_m$. Jede Wahl von Stützstellen $\xi_k \in Q_k$ liefert eine *Riemannsumme* für f, nämlich

$$R_Z(f) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\, \mathrm{Vol}_n(Q_k).$$

Für $n = 1$ sind dies die bekannten Riemannschen Rechteckflächensummen. Ist $n = 2$, so gibt der k-te Summand jeweils den Rauminhalt des Quaders mit Grundfläche Q_k und Höhe $f(\xi_k)$ an. Die Riemannsumme ist also eine Summe von Quadervolumina. Ist zusätzlich $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in Q$, so liegt der Graph von f ganz oberhalb der x-y-Ebene und berandet einen Körper K mit Grundfläche Q. Das Volumen dieses Körpers wird offenbar durch die Riemannsummen approximiert, wenn wir die Zerlegung immer weiter verfeinern. Liefert dieser Prozess einen eindeutig bestimmten Grenzwert, unabhängig von der Wahl der Zerlegungen und der Stützstellen, so betrachten wir f als integrierbar. Dies gelingt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

5.2.1 Definition Eine beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q in $\mathbb{R}^n$ ist *integrierbar*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_m$ existiert, so dass

$$\sum_{k=1}^{m} (\sup_{Q_k} f - \inf_{Q_k} f) \cdot \mathrm{Vol}_n(Q_k) \ < \epsilon \,.$$

Ist dies der Fall, so konvergieren für jede Folge $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von Q mit $\lim_{j\to\infty} ||Z_j|| = 0$ die entsprechenden Riemannsummen $R_{Z_j}(f)$ gegen denselben Grenzwert (und zwar unabhängig von der Wahl der Stützstellen). Man schreibt dafür

$$\lim_{j\to\infty} R_{Z_j}(f) = \int_Q f \,.$$

Um die Dimension zu betonen, schreibt man gelegentlich auch

$$\int_Q f(x)\, d^n x \,.$$

5.2.2 Satz *Stetige reellwertige Funktionen auf Quadern in $\mathbb{R}^n$ sind integrierbar.*

Dies ergibt sich ganz ähnlich wie im eindimensionalen Fall aus der Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Teilmengen (hier Quadern) gleichmässig stetig und beschränkt sind.

Die folgenden Eigenschaften lassen sich schliessen, indem man entsprechende Aussagen für die jeweiligen Riemannsummen formuliert und überprüft.

5.2.3 Satz *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ und seien $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:*

- Linearität: *Auch $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha(\int_Q f) + \beta(\int_Q g) \,.$$

- Monotonie: *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in Q$, so ist*

$$\int_Q f \leq \int_Q g \,.$$

- *Falls auch $|f|$ integrierbar ist, so gilt*

$$|\int_Q f| \leq \int_Q |f|\,.$$

Die tatsächliche Berechnung eines Integrals über einen Quader im $\mathbb{R}^n$ lässt sich auf eindimensionale Integrationen zurückführen, indem man rekursiv über eine Variable nach der anderen integriert. Das ist die Aussage des *Satzes von Fubini*:

5.2.4 Satz *Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

$$\int_Q f = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx_1\right) dx_2\right) \ldots dx_n\,.$$

Dabei darf die Reihenfolge der Teilintegrationen frei gewählt werden.

5.2.5 Beispiel Sei $n = 2$, $Q = [1, 2] \times [0, 1]$ und $f(x, y) = x \exp(xy)$ für $(x, y) \in Q$. Dann ist

$$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_1^2 (\int_0^1 xe^{xy}\,dy)\,dx = \int_1^2 x\,\frac{1}{x}e^{xy}\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$\int_1^2 (e^x - 1)\,dx = e^2 - e - 1\,.$$

Integriert man erst über x und dann anschliessend über y, erhält man dasselbe Ergebnis.

Beweis des Satzes von Fubini. Zumindest für den Fall $n = 2$ soll hier die Idee eines Beweises des Satzes von Fubini skizziert werden. Dazu betrachten wir spezielle Zerlegungen des Rechtecks Q durch Raster in x- und y-Richtung. Ist genauer $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b_1$ eine Teilung T_x des Intervalls $[a_1, b_1]$ und $a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_s = b_2$ eine Teilung T_y des Intervalls $[a_2, b_2]$, so ergibt sich daraus eine Zerlegung des Rechtecks $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ in $r \cdot s$ Teilrechtecke der Form $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$. Wählen wir nun als Stützstellen dieser Teilrechtecke jeweils immer die obere rechte Ecke (x_j, y_k), so lautet die entsprechende Riemannsumme für f:

$$R_Z(f) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(x_j, y_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})\,.$$

Schauen wir uns nun genauer an, was bei der sukzessiven Integration von f zunächst über x und dann über y getan wird. Wir definieren $g\colon [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \quad \text{für } y \in [a_2, b_2].$$

Die Riemannsumme von g zur Teilung T_y von $[a_2, b_2]$ zu den Stützstellen y_k lautet

$$R_{T_y}(g) = \sum_{k=1}^{s} g(y_k)(y_k - y_{k-1})\,.$$

Ausserdem wird der Wert von g an der Stelle y_k seinerseits näherungsweise durch die Riemannsumme der Funktion $x \mapsto f(x,y)$ zur Teilung T_x mit Stützstellen x_j angegeben:

$$g(y_k) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y_k)\, dx \approx \sum_{j=1}^{r} f(x_j, y_k)(x_j - x_{j-1})\,.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\int_{a_2}^{b_2} g(y)\, dy \approx R_{T_y}(g) \approx \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} f(x_j, y_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) = R_Z(f)\,.$$

Durch Grenzübergang folgt nun die Behauptung. q.e.d.

Bisher haben wir ausschliesslich über Quader in $\mathbb{R}^n$ integriert. Jetzt wollen wir uns darüber Gedanken machen, welche anderen Teilmengen als Integrationsbereiche in Frage kommen. Zum Beispiel könnte man über Kreisscheiben oder durch Geraden begrenzte Flächen in $\mathbb{R}^2$ oder über Kugeln in $\mathbb{R}^3$ integrieren. Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge, so können wir einen Quader Q in $\mathbb{R}^n$ auswählen, der S enthält, und eine gegebene Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ fortsetzen, indem wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob S offen oder abgeschlossen ist, oder keines von beidem. Das Integral von f über S definieren wir nun folgendermassen:

$$\int_S f := \int_Q g\,, \quad \text{falls } g \text{ über } Q \text{ integrierbar ist.}$$

Allerdings hat die Fortsetzung g von f jetzt möglicherweise längs des Randes der Teilmenge S Unstetigkeitsstellen. Selbst wenn f auf S stetig ist, kann g also hochgradig unstetig sein. Ob die Funktion g dennoch integrierbar ist, hängt nun auch davon ab, wie der Rand der Teilmenge S beschaffen ist. Die Integrierbarkeit ist gewährleistet, wenn der Rand eine sogenannte *Nullmenge* ist. Das bedeutet anschaulich, dass der Rand nicht zu stark ausgefranst ist.

Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Menge S ein *Normalgebiet* ist.

5.2.6 Definition Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ heisst *Normalgebiet* (bezüglich y), wenn es ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$. Ein Normalgebiet (bezüglich x) ist entsprechend definiert, wobei die Rollen von x und y vertauscht sind. Von diesem Typ sind zum Beispiel auch Kreisscheiben oder Ellipsen.

Nehmen wir an, das Normalgebiet S sei in einem Rechteck Q enthalten und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist f über S integrierbar und es gilt:

$$\int_S f = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy\Big)\, dx\,.$$

5.2.7 Beispiel Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von den Geraden berandet wird, die durch die Gleichungen $y = 0$, $x = 0$ und $y = 2 - 2x$ gegeben sind. Dann ist S ein Dreieck, enthalten in dem Rechteck $Q := [0,1] \times [0,2]$. Sei weiter

$$f(x,y) = 1 + (x + \frac{y}{2})^2 \quad \text{für } (x,y) \in S.$$

Um das Integral von f über S zu bestimmen, wollen wir den Satz von Fubini anwenden. Dafür schreiben wir S in folgender Form:

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - 2x\,.\} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 1 - \frac{y}{2}\}\,.$$

Nun integrieren wir zuerst über y und dann über x und erhalten dabei folgendes:

$$\int_S f = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (1 + (x + \frac{y}{2})^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(y + \frac{2(x+\frac{y}{2})^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2-2x} dx =$$

$$\int_0^1 \left(2 - 2x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \left(\frac{8}{3}x - x^2 - \frac{x^4}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

Dieser Wert gibt das Volumen des Körpers an, der nach oben durch den Graphen von f und nach unten durch das Dreieck S in der x-y-Ebene begrenzt wird. Der Graph von f sieht aus wie ein Sonnensegel, und der darunter befindliche Bereich ist sozusagen der beschattete Bereich.

5.3 Volumenberechnungen

Wir können die Vorbereitungen des letzten Abschnitts nun anwenden, um den Flächeninhalt einer krummlinig berandeten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ oder das Volumen eines Körpers in $\mathbb{R}^3$ zu definieren. Noch allgemeiner trifft man folgende Vereinbarung:

5.3.1 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge derart, dass die konstante Funktion $f(x) = 1$ (für alle $x \in \mathbb{R}^n$) über S integrierbar ist. Dann nennt man S *messbar* und fasst das Integral der 1-Funktion über S als ihr n-dimensionales Volumen auf:

$$\mathrm{Vol}_n(S) := \int_S 1\, d^n x\,.$$

Ist zum Beispiel $S \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ und der x-Achse, so lässt sich S als Normalgebiet (bezüglich y) schreiben:

$$S = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}\,.$$

Nach dem Satz von Fubini gilt daher wie gewünscht:

$$\mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1\, d^2(x,y) = \int_a^b (\int_0^{f(x)} 1\, dy)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Entsprechend kann man das Volumen eines dreidimensionalen Körpers berechnen, indem man den Körper mit parallelen Ebenen schneidet und über die dabei entstehenden Querschnittsflächen integriert. Dies ist das sogenannte *Cavalieri-Prinzip*.

5.3.2 Satz *Sei Q ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und sei $A \subset Q \times I \subset \mathbb{R}^3$ eine messbare Teilmenge. Für $z \in I$ sei $A_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in A\}$. Ist der Querschnitt A_z für jedes $z \in I$ ebenfalls messbar, so gilt:*

$$\mathrm{Vol}_3(A) = \int_a^b \mathrm{Vol}_2(A_z)\, dz\,.$$

Beweis. Nach Definition ist $\mathrm{Vol}_3(A) = \int_A 1\, d^3(x,y,z) = \int_{Q\times I} \chi_A$. Hier bezeichnet χ_A die sogenannte *charakteristische Funktion* von A:

$$\chi_A(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x,y,z) \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Satz von Fubini liefert

$$\int_{Q\times I} \chi_A = \int_a^b \left(\int_Q \chi_A(x,y,z)\, d^2(x,y) \right) dz\,.$$

Für fest gewähltes z ist $\chi_A(x,y,z) = \chi_{A_z}(x,y)$ für alle $(x,y) \in Q$, und daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Hier sind zwei klassische Volumenberechnungen:

5.3.3 Beispiele

- Um das dreidimensionale Volumen einer Kugel K von Radius R zu bestimmen, wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt im Zentrum der Kugel ist. Der Schnitt K_z der Kugel mit einer Ebene, parallel zur x-y-Ebene auf Höhe z, ist dann eine Kreisscheibe von Radius $\sqrt{R^2 - z^2}$. Hier ist also $\mathrm{Vol}_2(K_z) = \pi(R^2 - z^2)$, und daraus folgt:

$$\mathrm{Vol}_3(K) = \int_{-R}^{R} \mathrm{Vol}_2(K_z)\, dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = \pi(R^2 z - \frac{z^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

- Sei jetzt P eine Pyramide mit quadratischen Grundriss von Seitenlänge a und Höhe h. Wir wählen die Spitze der Pyramide als Nullpunkt des Koordinatensystems und lassen die z-Achse senkrecht nach unten zeigen. Der Schnitt P_z der Pyramide mit zur x-y-Ebene parallelen Ebene auf Höhe z ist ein Quadrat, und für deren Seitenlänge x gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{z}\,.$$

  Daraus folgt $x = \frac{a}{h} z$, und wir erhalten

$$\mathrm{Vol}_3(P) = \int_0^h \mathrm{Vol}_2(P_z)\, dz = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} z^2\, dz = \frac{1}{3} a^2 h\,.$$