5.4 Transformation auf Polarkoordinaten und lineare Transformationen

In diesem Paragraphen behandeln wir die Frage, wie sich Gebietsintegrale von Funktionen in mehreren Variablen bei einer Koordinatentransformation ändern. Zum Beispiel ist es bei einer Integration über ein Kreisgebiet $S \subset \mathbb{R}^2$ günstiger, zu Polarkoordinaten überzugehen. Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes in $\mathbb{R}^2$ ist beschrieben durch die Gleichungen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist. Die entsprechende Koordinatentransformation ist also die Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

5.4.1 Bemerkung *Sei $f \colon S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf einer messbaren Teilmenge S und bezeichne $A := \Phi^{-1}(S)$ die entsprechende Menge, beschrieben mit Polarkoordinaten. Dann können wir das Integral von f über S mithilfe der Polarkoordinaten folgendermassen ausdrücken:*

$$\int_S f(x, y)\, d^2(x, y) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi\,.$$

Das Auftauchen des Faktors r bei dieser Koordinatentransformation wird in der Physik meist anschaulich damit begründet, ein “infinitesimales” Segment eines Kreisbogens sei proportional zum Winkel (hier $d\varphi$), aber auch zum Radius r. Eine andere Begründung werden wir später nachliefern, wenn die allgemeine Transformationsregel formuliert ist. Hier zunächst zwei Anwendungsbeispiele.

5.4.2 Beispiel Berechnen wir mithilfe der Polarkoordinaten die Fläche einer Kreisscheibe K von Radius R. Hier ist $A = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ und $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}$. Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Vol}_2(K) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r dr\, d\varphi = 2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=R} = \pi R^2\,,$$

wie erwartet.

5.4.3 Beispiel Mithilfe der Polarkoordinaten kann man auch den Flächeninhalt unter der Gaussschen Glockenkurve, gegeben durch die Funktion $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$, berechnen. Die gesuchte Fläche ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\,.$$

Um auf ein Gebietsintegral zu kommen, multiplizieren wir dies Integral mit sich selbst, bezeichnen aber in der Kopie die Integrationsvariable mit y, und erhalten:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy\,.$$

In Polarkoordinaten wird daraus

$$\int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, d\varphi\, dr = 2\pi(-e^{-\frac{r^2}{2}})\Big|_0^\infty = 2\pi\,.$$

Die gesuchte Fläche beträgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

Wenden wir uns nun dem Ziel zu, eine Regel für das Verhalten von Integralen bei linearen Koordinatentransformationen zu formulieren. Es geht also eigentlich darum, die Substitutionsregel auf Funktionen in mehreren Variablen zu verallgemeinern. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Determinante. Wie schon erwähnt, gibt der Betrag der Determinante einer 2×2-Matrix den Flächeninhalt des von den Spalten erzeugten Parallelogramms an. Im dreidimensionalen Fall misst der Betrag der Determinante das Volumen des von den Spalten erzeugten Spates. Entsprechend gilt für das n-dimensionale Volumen der von n Vektoren in $\mathbb{R}^n$ erzeugten Spatfigur $K = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \mid 0 \le \alpha_k \le 1 \forall k\}$:

$$\mathrm{Vol}_n(K) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|\,.$$

Dies kann man mithilfe des Cavalieri-Prinzips beweisen.

5.4.4 Bemerkung *Sind $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ Vektoren, die ein Spat K aufspannen, und ist A eine $n \times n$-Matrix, so gilt:*

$$\mathrm{Vol}_n(A \cdot K) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}_n(K)\,.$$

Der Betrag der Determinante von A gibt hier also die Änderung des Volumens an.

Beweis. Wir können die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten einer Matrix B auffassen. Dann ist $|\det B| = \mathrm{Vol}_n(K)$. Mit dem Produktsatz folgt $|\det(AB)| = |\det(A)| \cdot |\det(B)| = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}_n(K)$. Die Spalten der Produktmatrix AB sind aber gerade die Vektoren $Av_1, \ldots, Av_n$. q.e.d.

Wenden wir diese Beobachtung auf Riemann-Summen an, erhalten wir folgende Aussage:

5.4.5 Satz *Sei A eine $n \times n$-Matrix, und bezeichne $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $\Phi(u) = Au$ gegebene lineare Abbildung. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f\colon \Phi(S) \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist:*

$$\int_{\Phi(S)} f(x)\, d^n(x) = |\det A| \int_S f(Au)\, d^n u\,.$$

Beweis. Wir skizzieren die Begründung dieser Aussage nur für den Fall $n = 2$. Schauen wir uns die Riemannsummen von $f \circ \Phi$ über S genauer an. Sei dazu $Q \supset S$ ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$, und sei Z eine Zerlegung von Q in Teilrechtecke $Q_1, \ldots, Q_r$.

Durch Anwendung der Transformation Φ erhalten wir eine Zerlegung von $\Phi(Q) = A{\cdot}Q \supset \Phi(S)$ in Parallelogramme $A{\cdot}Q_k$. Wie eben bemerkt, gilt für den Flächeninhalt dieser Parallelogramme jeweils

$$\mathrm{Vol}_2(AQ_k) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}_2(Q_k)\,.$$

Eine Wahl von Stützstellen $u_k \in Q_k$ liefert ausserdem Stützstellen $x_k = A \cdot u_k \in A \cdot Q_k$. Die zu Z gehörige Riemannsumme von $f \circ \Phi$ lautet

$$\sum_k f(A \cdot u_k)\,\mathrm{Vol}_2(Q_k)\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Betrag der Determinante von A wird daraus

$$|\det A| \cdot \sum_k f(A \cdot u_k)\,\mathrm{Vol}_2(Q_k) = \sum_k f(x_k)\,\mathrm{Vol}_2(A \cdot Q_k)\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das Analogon einer Riemannsumme für f für die Zerlegung von AQ in Parallelogramme $AQ_1, \dots, AQ_n$. Bei entsprechender Verfeinerung konvergieren auch diese Summen gegen das Integral von f über $\Phi(S)$. Durch Grenzübergang erhalten wir also die Behauptung. q.e.d.

5.4.6 Folgerung *Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und A eine $n \times n$-Matrix, dann gilt für die Volumina von S und $A \cdot S = \{Ap \mid p \in S\}$:*

$$\mathrm{Vol}_n(A \cdot S) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}_n(S)\,.$$

Ist $|\det A| = 1$, so geht bei der Multiplikation mit der Matrix A also jede Figur in eine Figur mit demselben Volumen über. Ist dagegen $A = \lambda E$ (das heisst, die Multiplikation mit A ist eine Streckung um den Faktor λ), so wird das Volumen jeder Figur mit λ^n multipliziert.

5.4.7 Beispiel Der Einheitskreis wird durch die lineare Abbildung, gegeben durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, auf eine Ellipse mit Halbachsen der Längen a in x-Richtung und b in y-Richtung abgebildet. Also ist der Flächeninhalt dieser Ellipse gleich $\pi \cdot ab$. Entsprechend kann man die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ auf ein Ellipsoid E mit Halbachsen der Längen a, b, c abbilden. Also ist

$$\mathrm{Vol}_3(E) = |\det(A)|\,\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot abc\,.$$

Hier ein weiteres Beispiel für eine lineare Transformation, die die Berechnung eines vorgegebenen Integrals erleichtert:

5.4.8 Beispiel Gesucht sei das Integral

$$\int_B e^{\frac{x+y}{x-y}}\, d^2(x,y) \quad \text{mit} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\, y \leq 0,\, y+1 \leq x \leq y+2\}\,.$$

Um die Gestalt des Integranden zu vereinfachen, bieten sich folgende neue Koordinaten an:

$$u = x + y, \quad v = x - y\,.$$

Dann ist $x = \frac{1}{2}(u+v)$ und $y = \frac{1}{2}(u-v)$. Wir betrachten also die lineare Transformation

$$\Phi\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Hier ist $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $|\det A| = \frac{1}{2}$. Die Menge B entspricht in (u,v)-Koordinaten der Menge:

$$S = \{(u,v) \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}\,.$$

Das ergibt sich, indem man in die definierenden Ungleichungen für B jeweils für x und y die entsprechenden Terme in u und v einsetzt. Das gesuchte Integral können wir jetzt mithilfe der Transformation folgendermassen berechnen:

$$\int_B e^{\frac{x+y}{x-y}}\, d^2(x,y) = |\det A| \int_S e^{\frac{u}{v}}\, d^2(u,v) = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du \right) dv\,.$$

Das innere Integral lautet

$$\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du = v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} = (e - e^{-1})v\,.$$

Integration über v liefert nun das Ergebnis

$$\int_B e^{\frac{x+y}{x-y}}\, d^2(x,y) = \frac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\, dv = \frac{3}{4}(e - \frac{1}{e})\,.$$

5.5 Satz von Green und Divergenz

Der *Satz von Green* stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Wegintegral längs einer geschlossenen Kurve in der Ebene und einem Gebietsintegral über das von der Kurve berandete Gebiet. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei wieder auf Normalgebiete.

5.5.1 Satz *Sei $F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen f, g und sei $A \subset D$ ein Normalgebiet. Der Rand ∂A sei so orientiert, dass das Innere immer auf der linken Seite der Randkurve liegt. Dann gilt:*

$$\int_A (\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y))\, dx\, dy = \int_{\partial A} F = \int_{\partial A} f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy\,.$$

5.5.2 Bemerkung *Wir können den Integranden auf der linken Seite der Gleichung, also $\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)$, als Zirkulation des Vektorfeldes auf dem Gebiet A auffassen. Ist $F = \nabla U$ ein Gradientenvektorfeld, dann ist $f = \partial_x U$ und $g = \partial_y U$. Also ist hier $\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y) = \partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U = 0$. Der Satz von Green bestätigt hier also noch einmal die schon bekannte Aussage 5.1.8, dass das Wegintegral längs eines geschlossenen Weges über ein konservatives Vektorfeld verschwindet.*

Beweis. Halten wir zunächst folgendes fest. Ist der Rand des Gebietes A parametrisiert durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ für $0 \le t \le T$, dann ist nach Definition

$$\int_{\partial A} F = \int_0^T \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^T \langle \begin{pmatrix} f(x(t),y(t)) \\ g(x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \rangle dt\,,$$

und daher nach Substitutionsregel

$$\int_{\partial A} F = \int_0^T [f(x(t),y(t))\, x'(t) + g(x(t),y(t))\, y'(t)]\, dt =$$
$$\int_{x(0)}^{x(T)} f(x, y(x))\, dx + \int_{y(0)}^{y(T)} g(x(y), y)\, dy\,.$$

Schauen wir uns jetzt das Normalgebiet A genauer an. Nach Definition gibt es stückweise stetig differenzierbare Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und $\beta_1, \beta_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$A = \{(x,y) \mid a < x < b, \beta_1(x) < y < \beta_2(x)\} =$$
$$\{(x,y) \mid \alpha_1(y) < x < \alpha_2(y), c < y < d\}\,.$$

Für die Integration von f über x längs des Randes denken wir uns den Rand ∂A zerlegt in den Graphen von β_1, den Graphen von β_2 und eventuell noch zwei Strecken parallel zur y-Achse (bei $x = a$ bzw. $x = b$). Zum Integral über x tragen die Strecken parallel zur y-Achse nichts bei. Deshalb liefert die Integration von f über x längs ∂A folgendes:

$$\int_a^b f(x, \beta_1(x))\, dx + \int_b^a f(x, \beta_2(x))\, dx = \int_a^b (f(x,\beta_1(x)) - f(x, \beta_2(x)))\, dx\,.$$

Entsprechend erhalten wir durch Integration von g über y längs ∂A:

$$\int_c^d (g(\alpha_2(y), y) - g(\alpha_1(y), y))\, dy\,.$$

Das Doppelintegral über A lautet in diesem Fall nach dem Satz von Fubini:

$$\int_c^d \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} \partial_x g(x,y)\, dx\, dy - \int_a^b \int_{\beta_1(x)}^{\beta_2(x)} \partial_y f(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_c^d (g(\alpha_2(y), y) - g(\alpha_1(y), y))\, dy - \int_a^b (f(x, \beta_2(x)) - f(x, \beta_1(x)))\, dx\,.$$

Also stimmen beide Seiten überein und die Behauptung ist gezeigt. q.e.d.

5.5.3 Beispiel Betrachten wir das Normalgebiet $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ und darauf das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$. Berechnen wir zuerst das Gebietsintegral aus der Formel von Green.

$$\int_A (\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y))\, dx\, dy = \int_A y\, d^2(x,y) = \int_0^1 \int_0^x y\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{1}{6}\,.$$

Der Rand des Dreiecks A besteht aus den drei Teilkurven $\gamma_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 1)$, $\gamma_2(t) = (1,t)$ $(0 \le t \le 1)$, $\gamma_3(t) = (1-t, 1-t)$ $(0 \le t \le 1)$. Hier ist also

$$\int_{\partial A} f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = \int_{\gamma_1} x^2\, dx + \int_{\gamma_2} xy\, dy + \int_{\gamma_3} x^2\, dx + xy\, dy\,.$$

Setzt man im dritten Teilintegral ein $x(t) = 1-t = y(t)$ und berücksichtigt $dx = -dt$ und $dy = -dt$, dann erhält man

$$\int_{\gamma_3} x^2\, dx + xy\, dy = \int_0^1 (-2)\,(1-t)^2\, dt\,.$$

Entsprechend findet man für die rechte Seite der Greenschen Formel:

$$\int_{\partial A} f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = \int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (-2)\,(1-t)^2\, dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Beide Seiten stimmen also überein, wie behauptet.

5.5.4 Folgerung *Ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte, stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurve, die ein Normalgebiet A berandet, so berechnet das folgende Integral den von γ umschlossenen Flächeninhalt:*

$$\frac{1}{2} \int_\gamma (x\, dy - y\, dx) = \text{Fläche}\,(A).$$

Beweis. Wähle $f(x,y) = -y$ und $g(x,y) = x$. Dann ist

$$\int_A (\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y))\, dx\, dy = \int_A (1+1)\, dx\, dy = 2 \text{ Fläche}\,(A)\,.$$

q.e.d.

5.5.5 Beispiel Sei $\gamma(t) = (\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(3t), \sin(t) - \frac{1}{4}\cos(3t))$ für $0 \le t \le 2\pi$. Die Kurve γ ist einfach geschlossen und umrandet eine Art Raute mit abgerundeten Ecken. Wir verwenden nun die Folgerung 5.5.4, um den Flächeninhalt dieser Figur zu berechnen. Setzen wir $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, dann ist $x(t) = \cos(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$ und $y(t) = \sin(t) - \frac{1}{4}\cos(3t)$. Die Ableitung lautet

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin(t) - \frac{3}{4}\cos(3t), \cos(t) + \frac{3}{4}\sin(3t))\,.$$

Also finden wir hier

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos^2(t) + \sin^2(t) - \frac{3}{16}(\sin^2(3t) + \cos^2(3t)) + \\ &\quad \frac{3}{4}(\cos(t)\sin(3t) + \sin(t)\cos(3t))]\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\frac{13}{16} + \frac{3}{4}\sin(4t))\,dt = \frac{13\pi}{16}\,.\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $\frac{13}{16}\pi$.

Der Satz von Green lässt sich mit dem Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes auf andere Art interpretieren.

5.5.6 Definition Ist $F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, versteht man unter der Divergenz von F die Funktion $\operatorname{div}(F)(x,y) = \partial_x f_1(x,y) + \partial_y f_2(x,y)$.

5.5.7 Beispiele Ist $F(x,y) = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}$ (für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$), dann ist $\operatorname{div} F(p) = 2c$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$. Das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}$ hat die Divergenz $\operatorname{div} F(x,y) = 3x$.

Ist γ ein stetig differenzierbarer Weg, setzen wir

$$ds = ||\gamma'(t)||\,dt$$

und nennen dies das dazugehörige *Linienelement*. Es bezeichnet die infinitesimale Weglänge von γ. Durch Umformulierung des Satzes von Green erhält man nun folgenden Divergenzsatz von Gauss:

5.5.8 Satz *Sei $A \subset D$ ein Normalgebiet. Für jeden Punkt $p \in \partial A$ bezeichne $n(p)$ einen Einheitsvektor, der bei p auf dem Rand ∂A des Gebietes A senkrecht steht und nach aussen zeigt. Bezeichne schliesslich ds das Linienelement. Dann gilt:*

$$\int_A \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial A} \langle F(p), n(p)\rangle\,ds\,.$$

Wenn wir uns unter dem Vektorfeld F eine Strömung vorstellen, gibt die rechte Seite an, wieviel Strömung durch den Rand des Gebietes A nach aussen austritt. Man bezeichnet deshalb die Divergenz von F auch als Quelldichte.

Beweis des Satzes. Schauen wir uns zunächst die rechte Seite genauer an. Nehmen wir an, der Rand des Gebietes A sei parametrisiert durch $\gamma\colon [a,b] \to U$, wobei die Orientierung so gewählt sei, dass das Innere von A immer links von $\dot\gamma(t)$ liege. Ist etwa $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [a,b]$, so erhalten wir den äusseren Normalenvektor $n(\gamma(t))$ durch Drehung des Geschwindigkeitsvektors $\dot\gamma(t)$ um $-90°$ und Normierung auf Länge 1. Das heisst also:

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} \begin{pmatrix} \dot y(t) \\ -\dot x(t) \end{pmatrix} .$$

Daraus ergibt sich für $p = \gamma(t)$, wenn wir auch noch die eindimensionale Substitutionsregel verwenden:

$$\langle F(p), n(p) \rangle \, ds = \langle F(\gamma(t)), n(\gamma(t)) \rangle \, ||\dot\gamma(t)|| \, dt =$$

$$[f_1(x,y)\, \dot y(t) - f_2(x,y)\, \dot x(t)]\, dt = f_1(x,y)\, dy - f_2(x,y)\, dx \, .$$

Wenn wir nun $g(x,y) = f_1(x,y)$ und $f(x,y) = -f_2(x,y)$ wählen, stimmt dieser Ausdruck mit dem Integranden überein, der uns auf der rechten Seite des Satzes von Green begegnet. Wir können also mit Green schliessen:

$$\langle F(p), n(p) \rangle \, ds = f_1(x,y)\, dy - f_2(x,y)\, dx = \int_A (\partial_x f_1(x,y) + \partial_y f_2(x,y))\, dx\, dy = \int_A \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy \, ,$$

wie behauptet. q.e.d.