2.4 Normalformen für kleine Matrizen

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über die möglichen Typen von 2×2-Matrizen und 3×3-Matrizen.

Beginnen wir mit dem Fall $n = 2$. Das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lautet wie bereits nachgerechnet:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A)\lambda + \det A\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(A)) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{Spur}(A))^2 - 4\det A}\,.$$

1. Fall: $(\operatorname{Spur} A)^2 > 4\det A$. Dann hat A zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Wählt man zu jedem dieser Eigenwerte einen Eigenvektor v_i, so bildet $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine Basis und für die Transformationsmatrix T, gebildet aus den Spalten v_1, v_2, gilt:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass hier v_1 und v_2 nicht senkrecht aufeinander stehen müssen!

2. Fall: $(\operatorname{Spur} A)^2 = 4\det A$. In diesem Fall hat A einen doppelten Eigenwert, nämlich $\lambda = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}(A)$. Ist der zugehörige Eigenraum $\mathbb{L}_\lambda$ zweidimensional, so muss $\mathbb{L}_\lambda = \mathbb{R}^2$ sein. Das bedeutet, $Av = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Mit anderen Worten, L_A ist eine Streckung um den Faktor λ und $A = \lambda E$. Ist $\dim \mathbb{L}_\lambda = 1$, dann ist A nicht diagonalisierbar. Wir wählen jetzt einen Eigenvektor v_1.

Behauptung: Es gibt einen weiteren Vektor v_2, so dass $(A - \lambda E)v_2 = v_1$ ist.

Beweis. Ergänzen wir zunächst v_1 nach Belieben durch Wahl eines linear unabhängigen zweiten Vektors $\tilde{v}_2$ zu einer Basis. Bezogen auf diese Basis geht A über in eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Weil die Spur von A gleich 2λ ist, und die Spur beim Basiswechsel erhalten bleibt, muss $y = \lambda$ sein. Jetzt setzen wir $v_2 := \frac{1}{x}\tilde{v}_2$. Nach Konstruktion gilt dann $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$. q.e.d.

Nach Konstruktion sind v_1 und v_2 linear unabhängig und bilden daher eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$. Es ist $Av_1 = \lambda v_1$ und $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$. Also liefert der Basiswechsel, beschrieben durch die Transformationsmatrix $T = (v_1, v_2)$, das Resultat:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ist $\lambda = 1$, so handelt es sich bei A um eine Scherung längs der v_1-Achse (siehe Übungsaufgabe).

2.4.1 Beispiel Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Also hat A den doppelten Eigenwert 1. Der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist nur eindimensional und wird von $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Die Bedingung $(A - E)v_2 = v_1$ wird u.a. erfüllt von $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nach dem entsprechenden Basiswechsel, beschrieben durch die Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ erhalten wir: $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Fall: $(\operatorname{Spur} A)^2 < 4 \det A$. Dann hat p_A zwei konjugiert komplexe Nullstellen, $\lambda_1 = s + it$ und $\lambda_2 = s - it$, wobei $s = \frac{1}{2}\operatorname{Spur}(A)$ und $t = \sqrt{\det A - \frac{1}{4}(\operatorname{Spur} A)^2} = \sqrt{\det A - s^2} > 0$.

Behauptung: In diesem Fall existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}.$$

Falls $s^2 + t^2 = 1$ und $(v_1, v_2) = (e_1, e_2)$, handelt es sich um eine Drehung.

Beweis. Weil λ_2 eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, hat das lineare Gleichungssystem $(A - (s - it)E)v = 0$ eine Lösung $0 \neq v$, wenn wir mit komplexen statt mit reellen Zahlen rechnen. Es gibt also einen komplexen Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ von A zum Eigenwert $s - it$. Wir schreiben v in der Form $v = v_1 + iv_2$, wobei $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sind. Dann ist $\overline{v} = v_1 - iv_2$ ein komplexer Eigenvektor von A zum Eigenwert $s + it$. Weil v und $\overline{v}$ linear unabhängig sind, sind auch die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig. Ausserdem gilt:

$$Av = Av_1 + iAv_2 = (s - it)(v_1 + iv_2) = (sv_1 + tv_2) + i(-tv_1 + sv_2).$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$Av_1 = sv_1 + tv_2 \quad \text{und} \quad Av_2 = -tv_1 + sv_2.$$

Daraus folgt direkt die Behauptung. q.e.d.

2.4.2 Beispiel Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{Spur}(A) = 4$ und $\det A = 13$. Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$ hat die komplexen Nullstellen $2 \pm 3i$. Nun lösen wir das komplexe Gleichungssystem

$$(A - (2 - 3i)E)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -6 \\ 3 & 3 + 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und finden (bis auf Vielfaches):

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also wird die Abbildung L_A bezogen auf die Basis, gebildet aus $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die folgende Matrix beschrieben:

$$M_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Wir können die Ergebnisse der bisherigen Überlegungen so zusammenfassen:

2.4.3 Satz *Jede reelle* 2×2*-Matrix ist ähnlich zu genau einer der folgenden Typen:*

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *($\lambda_1 > \lambda_2$) - diese Matrizen haben genau zwei Eigenrichtungen -*
- $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ *($\lambda \in \mathbb{R}$) - hier bleiben sämtliche Ursprungsgeraden stabil*
- $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *($\lambda \in \mathbb{R}$) - hier gibt es genau eine Eigenrichtung*
- $\begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$ *($s, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) - hier gibt es keine reelle Eigenrichtung*

Das entsprechende Resultat für 3×3-Matrizen sieht folgendermassen aus:

2.4.4 Satz *Jede reelle* 3×3*-Matrix A ist ähnlich zu genau einer der folgenden Typen:*

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ *($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$), falls A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.*
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$).*
- $\begin{pmatrix} s & -t & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *($s, t, \lambda \in \mathbb{R}$, $t > 0$), falls A komplexe Eigenwerte hat.*
- $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *($\lambda \in \mathbb{R}$), hier ist* $\dim(\mathbb{L}_\lambda) = 1$.

Beweis. Das charakteristische Polynom p_A einer 3×3-Matrix A hat Grad 3 und daher mindestens eine reelle Nullstelle. Hat p_A drei verschiedene reelle Nullstellen, so ist A diagonalisierbar und es handelt sich um den ersten Typ. Hat p_A eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle, dann sind der erste und der zweite Typ möglich. Das ergibt sich entsprechend wie im Fall $n = 2$. Weiter könnte p_A eine reelle und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte haben. Dann handelt es sich um den dritten Typ. Hat schliesslich p_A eine dreifache reelle Nullstelle λ, dann hängt der Typ von der Dimension des zugehörigen Eigenraums ab. Ist $\dim \mathbb{L}_\lambda = 3$, ist A diagonalisierbar und also vom ersten Typ. Ist $\dim \mathbb{L}_\lambda = 2$, so ist A vom zweiten Typ, und ist schliesslich $\dim \mathbb{L}_\lambda = 1$, so erhalten wir den letzten Typ. q.e.d.

2.4.5 Beispiele

- Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\lambda = 1$ als dreifachen Eigenwert. Der Eigenraum dazu ist zweidimensional, denn $\mathbb{L}_1 = \mathrm{lin}(e_2, e_3)$. Also ist die Matrix B vom zweiten Typ und ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Die Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat $\lambda = 2$ als dreifachen Eigenwert. Der Eigenraum dazu ist hier eindimensional, denn es handelt sich gerade um alle Vektoren auf der x-Achse. Also ist die Matrix B vom vierten Typ und ähnlich zu $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

Die Untersuchung der Normalformen von Matrizen soll nun auf die Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen angewendet werden. Hier zunächst zwei Beispiele dazu.

2.5.1 Beispiel Betrachten wir eine Population von Raubtieren und eine Population von dazugehörigen Beutetieren. Weil die Raubtiere die Beute fressen, sinkt mit steigender Anzahl Raubtiere die Menge an Beute, so dass sich daraufhin die Überlebenschancen der Raubtiere verschlechtern und ihre Anzahl wieder abnimmt. Dadurch können mehr Beutetiere überleben, was wiederum (mit Zeitverzögerung) zum Anwachsen der Raubtierpopulation führt. Dieser Sachverhalt wird durch die sogenannten *Räuber-Beute-Gleichungen* modelliert. Nehmen wir an, es seien durchschnittlich n_1 Raubtiere und n_2 Beutetiere vorhanden. Die Funktion $x_1(t)$ gebe die Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t minus n_1 an und $x_2(t)$ sei die Anzahl der Beutetiere minus n_2. Natürlich sind die Anzahlen eigentlich immer ganze Zahlen, aber bei genügend grossen Populationen können wir uns die Funktionen x_1, x_2 als stetige Funktionen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denken. Dann gehen wir von folgenden Differentialgleichungen aus:

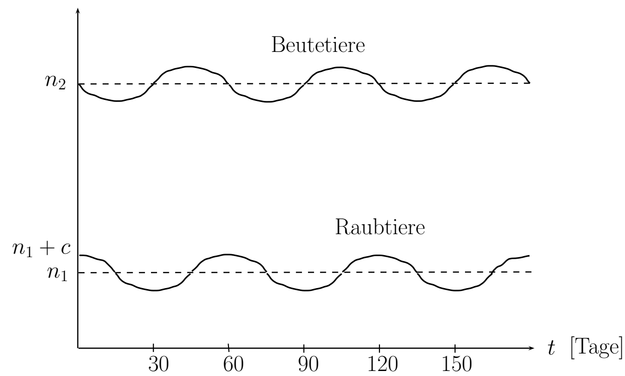
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha\, x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\alpha\, x_1(t) \end{aligned}$$

Hier steht $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ für die Zeit, und $\alpha > 0$ ist eine Proportionalitätskonstante. Die Lösung dieses Systems lautet

$$x_1(t) = c_1 \cos(\alpha t + c_2) \quad \text{und} \quad x_2(t) = -c_1 \sin(\alpha t + c_2) \quad (t \geq 0).$$

Hier sind c_1, c_2 passende Konstanten. Ist zum Beispiel konkret $\alpha = \frac{2\pi}{60}$, so lautet die Lösung des Systems zu den Anfangswerten $x_1(0) = c_1$ und $x_2(0) = 0$:

$$x_1(t) = c_1 \cos(\frac{2\pi}{60} t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = -c_1 \sin(\frac{2\pi}{60} t)\,.$$



Wenn die Zeit t in Tagen gemessen wird, ist hier nach 60 Tagen zum erstenmal der Ausgangszustand wieder erreicht.

2.5.2 Beispiel Nehmen wir nun an, die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ beschreiben die Grösse von zwei Populationen, die wechselseitig voneinander profitieren (zum Beispiel Bienen und Apfelbäume, oder Spatzen und Vogelbeerbäume, deren Samen durch die Spatzen weitergetragen werden). Dann lautet ein vereinfachtes entsprechendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha x_2(t) \\ x_2'(t) &= \alpha x_1(t) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet für $t \in \mathbb{R}$:

$$x_1(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{-\alpha t} \quad \text{mit Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Konstanten ergeben sich wiederum aus den Startpopulationen zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$c_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0))\,.$$

Unter einem *System zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* versteht man ein System von Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned}$$

Dabei sind a, b, c, d vorgegebene Zahlen und $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind gesuchte differenzierbare Funktionen in der Variablen $t \in \mathbb{R}$. Wir können die Koeffizienten zu einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zusammenfassen, und $x_1(t), x_2(t)$ als Komponenten einer vektorwertigen Funktion X von t auffassen. Damit erhalten wir für das Differentialgleichungssystem folgende kompakte Schreibweise:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \cdot X(t)\,.$$

In den beiden eben genannten Beispielen lauten die Differentialgleichungssysteme in Matrixschreibweise:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot X(t) \quad \text{bzw.} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot X(t)\,.$$

Das unterschiedliche Vorzeichen in der zweiten Zeile von A führt also zu völlig verschiedenen Lösungen. Wir werden gleich sehen, dass die Gestalt der Lösungen davon abhängt, welche Normalform die Koeffizientenmatrix hat.

Besonders einfach ist die Situation, wenn die Koeffizientenmatrix diagonalisierbar ist. Dann kann man nämlich durch einen Basiswechsel erreichen, dass die Gleichungen "entkoppelt" werden. Die entsprechende Aussage soll hier gleich allgemeiner für n miteinander gekoppelte Funktionen angegeben werden. Ein *System aus n gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* schreiben wir entsprechend mit einer $n \times n$–Koeffizientenmatrix A in der Form

$$X'(t) = AX(t)\,.$$

Dabei sind die Komponenten $x_j(t)$ von $X(t)$ differenzierbare Funktionen in einer Variablen (zum Beispiel sich gegenseitig beeinflussende Konzentrationen von Substanzen). Die Menge der Lösungen eines vorgegebenen Systems bildet einen linearen Unterraum im Vektorraum aller vektorwertigen Funktionen, und zwar kann man zeigen, dass die Lösungsmenge stets die Dimension n hat. Es gibt also n freie Parameter, die durch die Anfangswerte festgelegt werden können.

2.5.3 Beispiel Ist A eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann lautet das entsprechende Differentialgleichungssystem

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = AX(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Das System besteht also in diesem Fall eigentlich aus n entkoppelten Differentialgleichungen der Form $x_j'(t) = \lambda_j x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit den Lösungen $x_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ist die Koeffizientenmatrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, so können wir sie durch einen Basiswechsel in Diagonalgestalt überführen und finden folgendes Resultat.

2.5.4 Satz *Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von A zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dann lautet die allgemeine Lösung des Systems $X'(t) = AX(t)$:*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \,.$$

Hier sind $c_1, c_2, \ldots, c_n$ frei wählbare Konstanten.

Beweis. Durch den Wechsel auf die Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, geht die Matrix A in Diagonalform über und die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ stehen auf der Diagonalen. Das heisst, die Koordinaten $\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)$ des Vektors $X(t)$, ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$, erfüllen das entkoppelte Differentialgleichungssystem $\tilde{x}_j'(t) = \lambda_j \tilde{x}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Also ist $\tilde{x}_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$ für passende Konstanten $c_1, \ldots, c_n$. Dies ist gerade die Behauptung. q.e.d.

2.5.5 Beispiel Kehren wir zurück zu Beispiel 2.5.2. Hier lautet die Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\pm\alpha$, der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\lambda_1 = \alpha$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\lambda_2 = -\alpha$. Entsprechend lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \\ c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{-\alpha t} \end{pmatrix} ,$$

wie bereits angegeben.

2.5.6 Beispiel Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

Dann ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Für diese Matrix sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 5$ bzw. $\lambda_2 = 2$ von A. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$X(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + 2c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Für den Matrixtyp mit komplexen Eigenwerten kann man folgendes zeigen:

2.5.7 Satz *Sei A eine reelle 2×2–Matrix mit komplex konjugierten Eigenwerten $\mu \pm i\nu$ (wobei $\nu > 0$ ist). Sei weiter $v = v_1 + iv_2$ ($v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$) ein komplexer Eigenvektor zum Eigenwert $\mu - i\nu$. Dann hat die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $X'(t) = AX(t)$ die Form:*

$$X(t) = c_1 e^{\mu t}[\cos(\nu t + c_2)\, v_1 + \sin(\nu t + c_2)\, v_2]\,,$$

wobei c_1, c_2 reelle Konstanten sind.

2.5.8 Beispiel Betrachten wir noch einmal das Räuber–Beute–Modell 2.5.1. Das Modell liess sich zurückführen auf das System zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat den komplexen Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-i\alpha$. Hier ist also $\mu = 0$, $\nu = \alpha$ und die allgemeine reelle Lösung lautet, wie bereits angegeben:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha t + c_2) \\ -\sin(\alpha t + c_2) \end{pmatrix}.$$

Und hier noch ein weiteres Beispiel:

2.5.9 Beispiel Die Koeffizientenmatrix des Systems $\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -x_1(t) - 6x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 3x_1(t) + 5x_2(t) \end{array}$ lautet $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $2 \pm 3i$. Hier ist $\mu = 2$ und $\nu = 3$. Diese Matrix hat den komplexen Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $2 - 3i$. Also ist hier $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und die allgemeine Lösung hat die Form:

$$X(t) = c_1 e^{2t}[\cos(3t + c_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(3t + c_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}]\,,$$

wobei c_1, c_2 reelle Konstanten sind.

Beweis von 2.5.7: Aus $Av = (\mu - i\nu)v$ folgt $A\overline{v} = (\mu + i\nu)\overline{v}$. Also kann man die komplexen Eigenvektoren von A zu $\mu \pm i\nu$ als zueinander konjugiert wählen. Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems über $\mathbb{C}$ lautet:

$$Z(t) = \tilde{c}_1 e^{(\mu - i\nu)t} v + \tilde{c}_2 e^{(\mu + i\nu)t} \overline{v}\,,$$

wobei $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ komplexe Konstanten sind. Schreibt man jetzt die erste Konstante in Polarkoordinaten $\tilde{c}_1 = c_1 e^{-ic_2}$ (für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), und wählt $\tilde{c}_2$ als komplex Konjugierte von $\tilde{c}_1$, dann erhält man eine reelle Lösung, nämlich

$$\begin{aligned} X(t) &= \tilde{c}_1 e^{\mu t}[e^{-i(\nu t + c_2)} v + e^{i(\nu t + c_2)} \overline{v}] = \tilde{c}_1 e^{\mu t} 2\, \mathrm{Re}(e^{-i(\nu t + c_2)}(v_1 + iv_2)) \\ &= c_1 e^{\mu t}[\cos(\nu t + c_2)\, v_1 + \sin(\nu t + c_2)\, v_2]\,. \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$